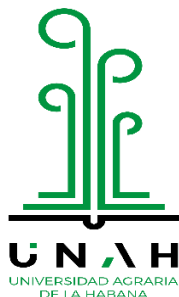


UNIVERSIDAD AGRARIA DE LA HABANA

“Fructuoso Rodríguez Pérez”

Facultad de Ciencias Técnicas

Departamento de Ciencias Básicas



CENTRO NACIONAL DE SANIDAD AGROPECUARIA



**Modelación matemática de la fluctuación
poblacional de Trips (Insecta: Thysanoptera) en
Solanum tuberosum L.**

Tesis para optar por el título de Máster en Biomatemática

Autor:

Ing. Javier González Torres

Tutor:

Dr.C. Ileana Miranda Cabrera

Mayabeque, 2022

Título: Modelación matemática de la fluctuación poblacional de Trips (Insecta: Thysanoptera) en *Solanum tuberosum* L.

Autor: Ing. Javier González Torres

Tutor: Dr.C. Ileana Miranda Cabrera

Proyecto al que se vincula: Pronóstico de la distribución de las principales plagas de *Solanum tuberosum* L. en correspondencia con el desarrollo del cultivo en escenarios climáticos futuros.

Agradecimientos

Agradezco a Dios, porque él es bueno y para siempre es su misericordia.

A mi familia, por su amor y su apoyo incondicional.

A mi tutora Ileana, por su guía, paciencia y dedicación.

Al claustro de profesores por sus enseñanzas, especialmente a la profe Lucy por su aliento y apoyo en todo momento.

A mis compañeros de trabajo, por su amistad y ayuda en lo que de ellos dependía.

A todos... Gracias.

Dedicatoria

A mi Señor y Dios, porque todas las cosas proceden de él, y existen por él y para él. Y él es antes de todas las cosas, y todas las cosas en él subsisten. A él sea la gloria por los siglos de los siglos.

Resumen

Los trips son insectos del orden Thysanoptera. Esta familia infesta las hojas, las flores y los frutos de la planta, provocando daños directos, como la necrosis, la caída prematura de brotes y flores; destruyen las células de los frutos, al alimentarse de estos, y causan deformaciones en el epicarpio. Además, mediante la propia alimentación y la oviposición, pueden transmitir virus que frecuentemente causan los daños más severos en los cultivos. Para el control de esta plaga se han utilizado varios métodos; los insecticidas químicos son los más utilizados debido a su eficacia en el manejo de los tisanópteros. Una alternativa para disminuir el uso de químicos es emplear controles biológicos para evitar la contaminación ambiental y el daño al ser humano. El estudio de la interacción de una plaga con su control permite adecuar el manejo de la misma. La presente investigación se realiza mediante los modelos matemáticos que describen la fluctuación poblacional y permiten conocer los factores bióticos y abióticos que regulan estas poblaciones.

Se elaboran tres modelos para la predicción de la densidad de tisanópteros: un modelo de dependencia lineal con la edad del cultivo, un modelo polinomial que relaciona el logaritmo de la población con el clima y un modelo determinístico presa-depredador con competencia. Para el uso de los ecólogos, estos modelos se implementaron en R utilizando el paquete Shiny. Además, se estudió la estabilidad de los puntos de equilibrio, mostrando el nivel poblacional al cual un enemigo natural controla su presa.

Palabras clave: modelación, tisanópteros, fluctuación poblacional, puntos de equilibrio.

Summary

Thrips are insects of the order Thysanoptera, this family infests the leaves, flowers and fruits of the plant, causing direct damage, such as necrosis, the premature fall of buds and flowers, destroying the cells of the fruits by feeding on these, causing deformations in the epicarp. In addition, through their own feeding and oviposition, they can transmit viruses that frequently cause the most severe damage to crops. Various methods have been used to control this pest, among which chemical insecticides are the most used due to their effectiveness in managing thrips. An alternative to avoid the use of biological chemicals is to use controls to avoid environmental contamination and harm to humans. The study of the interaction of a pest with its control allows to adapt the management, this research is carried out through mathematical models that describe the population fluctuation and allow to know the biotic and abiotic factors that regulate these populations.

In the present investigation, three models are elaborated for the prediction of the density of thrips: a model of linear dependence with the age of the crop, a polynomial model that relates the logarithm of the population with the climate and a deterministic model of prey-predator with competition. The models are implemented in R using Shiny for use by ecologists. In addition, the stability of the equilibrium points will be studied, showing the population level at which, a natural enemy controls its prey.

Key words: modeling, thrips, population fluctuation, equilibrium points.

Índice

Introducción.....	1
Capítulo 1. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA	6
1.1 Trips como plagas en el cultivo de la papa.....	6
1.2 Modelos matemáticos en la simulación de la fluctuación de poblaciones7	7
Modelo de regresión lineal.....	8
Modelo discreto de una sola especie.....	9
Modelo de crecimiento maltusiano	10
Modelo logístico.....	11
Modelo de Gompertz	12
Modelo de Lotka-Volterra.....	13
Fundamento para la selección del modelo.....	14
1.3 Métodos numéricos para la simulación de modelos matemáticos.....	14
Método de Euler	14
Método de Taylor.....	16
Métodos de Runge-Kutta (RK).....	17
RK1.....	18
RK2 o Euler mejorado	18
RK4.....	19
Método de Adams-Bashforth-Moulton de 4 orden	19
Fundamento para la selección del método matemático.....	20
1.4 Softwares implementados para predecir plagas agrícolas.....	20
Fundamento para la selección de software	22
Capítulo 2. MATERIALES Y MÉTODOS.....	23
2.1 Métodos y metodologías empleados en la investigación	23
2.2 Modelación matemática.....	24
Modelo 1	24
Modelo 2	24
Modelo 3 (Basado en el ciclo biológico de la plaga).....	25
Modelo 4 (Sistema de ecuaciones de presa-depredador).....	25
Escenarios para la simulación.....	26
2.3 Herramientas informáticas para la simulación matemática.....	29

Capítulo 3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN.....	33
3.1 Modelo matemático que describe la fluctuación poblacional de trips en papa 33	
Modelo de regresión Edad	33
Modelo de regresión Edad - Clima	35
Modelo del ciclo biológico	36
Modelo Presa - Depredador	37
3.2 Equilibrio del Agro-ecosistema: planta (<i>S. tuberosum</i> L.) – plaga (Trips) – Enemigos naturales (depredadores).....	39
3.3 Sistema para la simulación de la densidad poblacional de trips	42
Conclusiones	48
Recomendaciones.....	49
Bibliografía.....	50

Introducción

Los trips son insectos del orden Thysanoptera. Están distribuidos en todo el mundo, aunque son más abundantes en países tropicales (Brunner y Frey, 2010). Hasta el año 2020 se habían reportado, aproximadamente, 6216 especies conocidas de este orden. Los trips son pequeños (mayormente de 1 mm de largo o menos), delgados y alados. Su color puede variar de acuerdo a la temperatura ambiente y su fuente de alimentación, normalmente son negros, amarillos o cafés (Cano Calle, 2020).

Estos insectos infestan las hojas, las flores y los frutos de la planta; provocan daños directos a la misma, como la necrosis, la caída prematura de brotes y flores, destruyen las células de los frutos al alimentarse de estos, causando deformaciones en el epicarpio. Además, mediante la propia alimentación y la oviposición, pueden transmitir virus que frecuentemente causan los daños más severos en los cultivos (Wang *et al.*, 2019; Meza *et al.*, 2020). Estos virus pueden ser de los géneros Tospovirus, Ilarvirus, Carmovirus, Sobemovirus y Machlomovirus. Entre estos, los Tospovirus son conocidos como el género más dañino, es transmitido por 14 especies de trips y han generado enfermedades en cultivos de gran importancia económica (Alburez Vielmann, 2018).

Esta plaga provoca serios daños económicos en los vegetales, ornamentales y cultivos protegidos alrededor de todo el mundo (Gómez, Ramírez y Polo, 2018). Afectan los cultivos de leguminosas (Fabales: Fabaceae), cucurbitáceas (Cucurbitales: Cucurbitaceae), solanáceas (Solanales: Solanaceae) (Wang *et al.*, 2019), ataca los cultivos de cebolla (*Allium cepa*) (Estay P., 2018), lechuga (*Lactuca sativa*) (Salas F., 2017), plátano (*Musa acuminata*) (Crisanto Castro, 2018), aguacate (*Persea americana* Mill) (Cano Calle, 2020), mango (*Mangifera indica*) (Alvarado Huarca, 2019), vid (*Vitis vinifera*), guayaba (*Psidium guajava*), las especies de *Selenicereus* (Cactaceae) (Meza *et al.*, 2020), limón (Atakan y Pehlivan, 2019), maracuyá (*Passiflora edulis*) (Salamanca, Varon y Santos, 2010), varias especies de las rosáceas (Rosales: Rosacea) como el melocotón (*Prunus persica* L.) y el género *Rubus* (Rhodes y Liburd, 2017). Incluso han sido referenciados en otras plantas cultivadas como el algodón (*Gossypium hirsutum* L.) (Malvaceae), el

melocotonero (*Prunus persica* L.) (Rosaceae) y el tabaco (*Nicotiana tabacum* L.) (Solanaceae) (Sosa, Zamar y Torrejon, 2017).

En Cuba, han existido afectaciones, por parte de estos insectos, en el tomate (Castillo Reyes y González Muñoz, 2015), zanahoria (*Daucus carota* D. C), acelga (*Beta vulgaris* var. Cicla L.) (González, Suris y Renata-Salazar, 2012) y en diferentes especies de plantas ornamentales (González, Fernández y Castillo, 2016). Pero los cultivos más afectados por esta plaga han sido el frijol (*Phaseolus vulgaris*) por el *Megalurothrips usitatus* donde, hasta el 3 de marzo de 2020, estaban afectadas unas 13 mil 533 hectáreas, dándole de bajas o demolidas sin ser cosechadas alrededor de 7 mil 792 (Rey, 2020), y la papa (*Solanum tuberosum* L.) por *Thrips palmi* Karny, *Frankliniella tritici* Fitch, *Frankliniella schultzei* (Trybom), *Frankliniella insularis* (Franklin) y *Thrips tabaci* Lindeman, donde se señala la presencia de trips en las hojas durante todo el ciclo del cultivo (Elizondo Silva, et al., 2016).

Este escenario pone en evidencia la necesidad de controlar dicha plaga. Varios métodos han sido utilizados para el control de los trips; los insecticidas químicos son los más comúnmente empleados por su eficacia en el manejo de estos insectos (Alvarado Huarca, 2019). Sin embargo, la mejor solución es cultivar y cosechar mediante técnicas naturales de control de plagas, evitando así la contaminación ambiental y el daño sobre el ser humano (Toro Álava, 2017).

Como alternativa al uso de los insecticidas químicos contra los trips se han utilizado como control biológico enemigos naturales, entre los que se encuentran los hongos entomopatógenos *Metarhizium anisopliae* (Metschn.), *Lecanicillium lecanii* (Zimm.) Zare & Gams y *Beauveria bassiana* (Bals. -Criv.) Vuill. (Elizondo Silva, Murguido Morales, Matamoros Torres 2011), las chinches *Nesidiocoris tenuis* Reuter que se alimentan principalmente de los estadios ninfales de trips (Hemiptera: Miridae) (Elizondo Silva, et al., 2016); además, diferentes especies de *Orius*, los cuales poseen características que justifican su uso como agentes de control biológico, como son: la alta eficiencia de búsqueda, la capacidad de sobrevivir en baja densidad de presas y su aumento poblacional cuando existen presas en abundancia (Gómez, Ramírez y Polo, 2018).

Una forma de investigar la interacción de los trips con sus enemigos naturales en el ecosistema es empleando modelos matemáticos, los cuales describen la fluctuación poblacional y permiten conocer los factores bióticos y abióticos que regulan estas poblaciones (Miranda, 2014). Los modelos matemáticos permiten predecir puntos de equilibrio que indican el nivel poblacional al cual un enemigo natural controla su presa (Sharov, 1999).

Por otra parte, la distribución, la abundancia y el comportamiento de estos insectos son notablemente afectados por la temperatura (Yadav y Chang, 2014), por lo que es necesario conocer y registrar las condiciones climáticas de la región para lograr mejores predicciones.

Por lo anteriormente planteado, es preciso simular la fluctuación poblacional de trips en interacción con los factores del ecosistema para conocer el momento de los picos poblacionales de la plaga y la cantidad de depredadores que lo controlan.

En Cuba se han realizado varios modelos de trips. Por su parte, Piedra *et al.* (1999) presentaron un modelo del ciclo biológico del *T. palmi* Karny en diferentes temperaturas controladas, donde se observó mayor velocidad de desarrollo de la especie a medida que se incrementó la temperatura (15-30°C) en cada una de las fases del insecto. La ecuación de la velocidad de desarrollo en cada caso resultó una dependencia lineal entre la velocidad de desarrollo y la temperatura. A pesar de los buenos resultados mostrados por este modelo, en su análisis no toma en cuenta la influencia de depredadores naturales.

Cabrera Campos *et al.* (2004) realizaron una descripción del patrón espacial de *T. palmi* Karny en el cultivo de papa mediante la distribución binomial negativa, obteniendo como resultado que las larvas se ubican con mayor frecuencia en el estrato medio de la planta, mientras que los adultos lo hacen en el estrato superior. Este estudio ofrece un mejor monitoreo de las poblaciones, pero no predice la fluctuación poblacional de los trips, por lo que tampoco es factible en este sentido. Elizondo Silva y Murguido Morales (2006) realizaron modelos de mejor ajuste matemático a la fluctuación de las poblaciones de *T. palmi* Karny en el cultivo de la papa a partir de la brotación del cultivo. Sus resultados demuestran que existe una

tendencia al incremento rápido de la población, que ocurre en un plazo variable entre 1 ± 3 semanas después de la emergencia de las primeras larvas, en dependencia del completamiento de las primeras generaciones. Sin embargo, estos modelos no toman en cuenta factores como el clima y la existencia de depredadores naturales.

Por consiguiente, no se han realizado estudios de pronóstico que establezcan la relación de los trips con sus enemigos naturales e incluya variables climáticas. Por lo que se necesita un modelo para el pronóstico de la densidad poblacional de la plaga en interacción con los elementos del ecosistema que permita determinar las condiciones de equilibrio para el control de la misma.

A partir de lo descrito anteriormente, se tiene como **problema** que se desconoce el nivel de la población de enemigos naturales que logra un control de las poblaciones de trips en *S. tuberosum* L. en las condiciones climáticas de Cuba.

Para dar respuesta a este problema se ha trazado la siguiente **Hipótesis**:

La simulación de un modelo matemático que describa la dinámica de trips en *S. tuberosum* L. contribuirá a establecer una estrategia de manejo para el control de estos insectos.

Se ha identificado como **objeto de estudio** la fluctuación poblacional de trips en *S. tuberosum* L.

Como **campo de acción** se tiene:

Agro-ecosistema planta (*S. tuberosum* L.) – plaga (Trips) – Enemigos naturales (depredadores) en las condiciones climáticas de Cuba.

Como **objetivo general**: Simular la fluctuación poblacional de trips sobre el cultivo de la *S. tuberosum* L. en un agro-ecosistema cubano.

Como **objetivos específicos** se tienen:

1. Establecer un marco teórico-conceptual que sirva de sustento para la simulación de la fluctuación poblacional de trips sobre el cultivo de *S. tuberosum* L.

2. Seleccionar un modelo matemático que describa la fluctuación poblacional de tisanópteros en un ecosistema.
3. Determinar las condiciones de equilibrio del ecosistema según estudio de estabilidad del modelo.
4. Validar el nivel de predicción del modelo en la determinación de la densidad poblacional de tisanópteros presentes en el ecosistema.

Como **novedad científica** se logra establecer un modelo que describe la fluctuación poblacional de trips en *S. tuberosum* L.

Importancia práctica:

Se predice, mediante la simulación de un modelo matemático, el nivel de *Orius* spp. que controla trips y los momentos del ciclo fenológico de *S. tuberosum* L. donde es necesario establecer dicho control.

Capítulo 1. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

En el presente capítulo se puntualizan los daños causados en el cultivo de la papa por la plaga de trips a la economía mundial y la forma en que se abordan los estudios poblacionales con el uso de la biomatemática.

En el Epígrafe 1.1 se exponen los principales daños causados por esta plaga en diferentes regiones del planeta. El Epígrafe 1.2 presenta el concepto asociado a la modelación matemática, así como una breve reseña sobre los modelos más utilizados para la dinámica poblacional. En el Epígrafe 1.3 se establece de forma concisa qué son los métodos numéricos y se presentan los empleados en la simulación de ecuaciones. El Epígrafe 1.4 enmarca una serie de softwares y herramientas que se han utilizado para el control de plagas agrícolas.

1.1 Trips como plagas en el cultivo de la papa

La papa es el tercer cultivo alimenticio más importante del mundo en términos de consumo humano después del arroz y del trigo. Se produce en más de 100 países de todo el mundo. Aproximadamente 1,4 mil millones de personas consumen papa regularmente, y la producción total mundial del cultivo sobrepasa los 300 millones de toneladas métricas (International Potato Center, 2022).

La producción de este tubérculo es amenazado continuamente por insectos plaga, y es esta una de las principales causas de pérdidas en cultivos a nivel mundial (Corrales Gutiérrez, 2020).

Los trips han dañado los cultivos de papa alrededor del mundo. Estos insectos son los transmisores naturales del virus de la mancha del tomate o Tospovirus (TSWV, por sus siglas en inglés). La enfermedad en la papa, debido a la infección con el Tospovirus, ocurre esporádicamente y puede conducir a la pérdida completa de la cosecha. En Australia, el vector que más ha causado epidemias en la papa es el *T. tabaci* Lindeman o trips de la cebolla (Westmore, Allen y Wilson, 2019).

En Argentina, desde 2006, el Tospovirus ha ocasionado pérdidas económicas en los cultivos de papa en el sureste de la provincia de Buenos Aires, alcanzando altos

niveles de incidencia en cultivos de papa “Innovator” en las temporadas 2008-09 (De Borbon, Ortego y Estrada, 2021).

En Corea, los trips se encontraron por primera vez en pimientos de invernadero en la isla de Jeju en 1993 y se convirtieron en una plaga grave de hortalizas y cultivos ornamentales en las zonas costeras del sur. Un brote en el cultivo de papas provocó, aproximadamente, una pérdida de rendimiento del 30% (Li *et al.*, 2021).

En Venezuela, con la llegada del *T. palmi* Karny en 1991, se redujo en 50% la producción de papa en el país, al limitar el cultivo en los estados de Aragua y Carabobo (Cermeli, Morales y Godoy, 2001).

En Cuba, el *T. palmi* Karny se introdujo a finales de 1996 y se ha convertido en una de las plagas de mayor importancia económica para la agricultura nacional por los severos daños que ocasiona en los sembrados de papa, frijol, pimiento y pepino (Rodríguez, Ramos y Surís, 2007), llegando en ocasiones a destruir totalmente las cosechas (González Muñoz, 2011). Por tal motivo, la nación invierte grandes recursos para la producción del este cultivo, incluyendo gastos para los plaguicidas químicos y recursos técnicos para el control de esta plaga (Elizondo Silva, 2011; González Muñoz, 2011; Elizondo Silva *et al.*, 2013).

1.2 Modelos matemáticos en la simulación de la fluctuación de poblaciones

La simulación es la descripción de un proceso mediante prototipos particulares y realiza el estudio, planificación y/o diseño de una situación representativa de la realidad. Para ello, se requiere poseer conocimiento matemático teórico al relacionar el modelo con un propósito específico (Pineda Medina, 2019).

Los modelos son utilizados con el fin de analizar, describir, explicar, simular, explorar, controlar y predecir, fenómenos, sistemas o procesos. Un modelo matemático permite determinar una salida o resultado final a partir de una configuración inicial o datos de entrada (Ginovart, 2015). La dinámica de poblaciones es uno de estos fenómenos que puede ser simulado a través de los modelos matemáticos. Este es uno de los temas de mayor importancia para

entender el desarrollo temporal y espacial de grupos de organismos de la misma especie que se desarrollan en diferentes ambientes (Sarango Cuenca, 2020). Para ello se han utilizado diferentes modelos:

Modelo de regresión lineal

La estructura del modelo de regresión lineal es la siguiente:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$$

En esta expresión se admite que todos los factores o causas que influyen en la variable respuesta Y pueden dividirse en dos grupos: el primero contiene a una variable explicativa X y el segundo incluye un conjunto amplio de factores no controlados que se engloban bajo el nombre de perturbación o error aleatorio, ε , que provoca que la dependencia entre las variables dependiente e independiente no sea perfecta, sino que esté sujeta a incertidumbre (Montoro, 2015).

Lo que en primer lugar sería deseable en un modelo de regresión es que estos errores aleatorios sean en media cero para cualquier valor x de X , es decir,

$$E[\varepsilon/X = x] = E[\varepsilon] = 0, \text{ y, por lo tanto:}$$

$$E[Y/X = x] = \beta_0 + \beta_1 x + E[\varepsilon/X = x] = \beta_0 + \beta_1 x$$

En dicha expresión se observa que:

- La media de Y , para un valor fijo x , varía linealmente con x .
- Para un valor x se predice un valor en Y dado por $y^{\wedge} = E[Y/X=x] = \beta_0 + \beta_1 x$, por lo que el modelo de predicción puede expresarse también como $Y^{\wedge} = \beta_0 + \beta_1 X$.
- El parámetro β_0 es la ordenada al origen del modelo (punto de corte con el eje Y) y β_1 la pendiente, que puede interpretarse como el incremento de la variable dependiente por cada incremento en una unidad de la variable independiente. Estos parámetros son desconocidos y se estiman de cara a realizar predicciones.

Además de la hipótesis establecida sobre los errores de que en media han de ser cero, se establecen las siguientes hipótesis:

- La varianza de ε es constante para cualquier valor de x , es decir,

$$\text{Var}(\varepsilon/X = x) = \sigma^2$$

- La distribución de ε es normal, de media 0 y desviación σ .
- Los errores asociados a los valores de Y son independientes unos de otros.

En consecuencia, la distribución de Y para x fijo es normal, con varianza constante σ^2 , y media que varía linealmente con x , dada por $\beta_0 + \beta_1 x$. Además, los valores de Y son independientes entre sí (Montoro, 2015).

De igual forma, se plantean polinomios incluyendo diversas variables independientes. Todos estos modelos pertenecen a la estadística inferencial. Sin embargo, en la mayoría de los estudios poblacionales se emplean modelos de ecuaciones diferenciales.

Modelo discreto de una sola especie

Este es uno de los modelos más simples de crecimiento de la población de una especie. Los datos típicos de las variaciones de la población de una especie en una determinada región serían las mediciones tomadas en un intervalo de tiempo Δt . La tasa de cambio de la población durante el intervalo de tiempo Δt es

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t}$$

(Fonseca Riquelme, 2015):

Esto indica la tasa absoluta de crecimiento de la población, una cantidad muy importante es la base de cambio de la población, $R(t)$. Es llamada tasa de crecimiento por unidad de tiempo (por ejemplo, por año) medida sobre el intervalo de tiempo Δt .

$$R(t) = \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t N(t)} \quad (1.1)$$

El cambio porcentual en la población es: $100 \frac{\Delta N}{N(t)} = 100 R(t) \Delta t$ es decir, 100 veces la tasa de crecimiento $R(t)$ es el porcentual en la población por unidad de tiempo. Por

ejemplo, si en solo medio año la población aumenta en un 20%, entonces $R(t) = 2/5$ y la tasa de crecimiento es 40% por un año (medido durante medio año). La ecuación 1.1 no puede ser utilizada para determinar la población en tiempos futuros ya que solo es la definición de $R(t)$. Sin embargo, si la tasa de crecimiento y la población inicial fuesen conocidos, entonces la población futura puede calcularse (Fonseca Riquelme, 2015):

$$N(t + \Delta t) = N(t) + \Delta t R(t) N(t)$$

Suponiendo que la población de la especie solo cambia debido a nacimientos y muertes. Ningún experimentador exterior analiza alguna especie adicional en el sistema. No hay migración al interior o fuera de la región. Por lo tanto,

$$N(t + \Delta t) = N(t) + (\text{N}^\circ \text{ de nacimientos}) - (\text{N}^\circ \text{ de muertes})$$

La tasa reproductiva (nacimiento) b por unidad de tiempo medida sobre el intervalo de tiempo Δt y la tasa de muerte d son definidas como:

$$b = \frac{\text{N}^\circ \text{ de nacimientos}}{\Delta t N(t)}$$

$$d = \frac{\text{N}^\circ \text{ de muertes}}{\Delta t N(t)}$$

Por consiguiente, la población en un tiempo posterior Δt , $N(t + \Delta t)$ es:

$$N(t + \Delta t) = N(t) + \Delta t(b - d)N(t)$$

La tasa de crecimiento R ,

$$R = b - d$$

es la tasa de natalidad menos la tasa de mortalidad.

Modelo de crecimiento maltusiano

En el año de 1798 el economista inglés Thomas Malthus desarrolló uno de los primeros modelos matemáticos aplicados al crecimiento poblacional. La idea básica de este modelo es la suposición de que la velocidad con que crece la población es proporcional al tamaño de la misma. Si $P(t)$ simboliza la cantidad de habitantes en

la población en el tiempo t , la suposición de Malthus se expresa como (May Cen, 2016):

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

donde k es la constante de proporcionalidad. Este modelo es adecuado para pronosticar poblaciones en un corto espacio de tiempo, pero falla al tomar en cuenta muchos factores como la emigración e inmigración, por ejemplo.

De una forma sencilla, se puede llegar a la solución al modelo de Malthus:

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

donde representa la población inicial en el tiempo $t = 0$.

O sea que, si en un tiempo inicial t_0 se tiene una población de mosquitos P_0 , asumiendo el modelo de Malthus, la población de insectos crecerá descontroladamente de forma exponencial (May Cen, 2016).

Modelo logístico

El modelo logístico es una mejora del modelo de Malthus. Cuando una magnitud crece en un sistema finito, en cierto punto el tamaño finito del sistema limita el crecimiento de la magnitud por la falta de recursos suficientes que permitan la continuidad del crecimiento exponencial.

Un ejemplo común son los ecosistemas biológicos donde ciertas especies basan su supervivencia en altas tasas de reproducción o natalidad. En un primer momento cuando hay pocos individuos, el crecimiento es exponencial, sin embargo, en cierto momento este crecimiento exponencial cesa debido a que los recursos alimentarios del territorio no son infinitos (May Cen, 2016).

En esos casos el crecimiento de la población P con el tiempo (t) responde a la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dP}{dt} = aP - \beta P^2$$

donde α y β son constantes positivas. El término $-\beta P^2$ se interpreta como de inhibición o competencia.

Las soluciones a la ecuación logística pronostican con gran precisión las pautas de crecimiento de ciertas bacterias, protozoarios, pulgas de agua y moscas de la fruta, en un espacio limitado.

El esquema logístico añade una capacidad límite a una determinada población. O sea, asumiendo una población inicial de $P_0 = 3$, por ejemplo, la población de mosquitos no aumentará descontroladamente, sino que llegará en algún tiempo t a cierto límite en el cual cesará de incrementarse (May Cen, 2016).

Modelo de Gompertz

El modelo Gompertz se define como un modelo que aporta información valiosa en el estudio de situaciones o fenómenos de crecimiento poblacional o de cualquier índole en un espacio restringido de recursos y donde el crecimiento máximo puede ser muy pequeño o muy grande. Por su parte, al ser un modelo de crecimiento que representa un medio limitado como el logístico, se describe por medio de un gráfico de tipo sigmoidea, o sea, en forma de “S”. En su gráfica se identifican tres fases: el crecimiento exponencial (primera), la interacción con el medio (segunda) y el equilibrio (tercera) (Rodríguez y Ulloa, 2017).

Aunque existen innumerables ecuaciones que reflejan un modelo Gompertz. Se ha tomado, por los parámetros que utiliza, el siguiente:

$$P(t) = ke^{-\ln\left(\frac{k}{P_0}\right)e^{-rt}}$$

Donde,

El elemento $P(t)$, en el modelo Gompertz, representa el tamaño de la población existente de cierto organismo o el crecimiento de una característica del mismo (peso, talla, etc.), en un tiempo dado denominado “ t ” y expresado en años, mes, días, horas, etc. El elemento “ e ” representa la base del logaritmo natural (aproximadamente 2,7183). Cabe destacar que $P(t)$ es una variable dependiente, t es una variable independiente y “ e ” es constante. El parámetro “ k ” es la población

máxima que podría existir en un sistema o bien la medida máxima a la que llegaría alguna característica de un organismo. El parámetro P_0 es la población, peso o talla inicial existente en el sistema u organismo. Por lo cual, el parámetro P_0 debe ser siempre mayor que cero y menor que el límite de la capacidad de carga (k). Los valores de “ r ” pueden ser variados, no obstante, unos permiten que se desarrolle, gráficamente, la función Gompertz y otros no (Rodríguez y Ulloa, 2017).

Modelo de Lotka-Volterra

En cada ecosistema no vive solamente una especie de población. La variedad de especies en este da inicio a la competencia por los recursos del entorno. Existe un rango a causa de la cadena alimenticia, lo cual lleva a los conceptos de presas y depredadores, en el que estos últimos se alimentan de los primeros para su supervivencia.

Las ecuaciones de Lotka-Volterra, también conocidas como ecuaciones predador-presa, fueron planteadas de forma independiente por el estadounidense Alfred J. Lotka en 1925 y el italiano Vito Volterra en 1926. Estas son un par de ecuaciones diferenciales de primer orden no lineales utilizadas para el modelado de dos poblaciones que interactúan, una presa y un depredador (May Cen, 2016).

Tales ecuaciones se definen como:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy$$

$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy$$

Donde,

x = Cantidad de presas al tiempo t

y = Cantidad de depredadores al tiempo t

a = tasa intrínseca de aumento de la población de presas

b = tasa de depredación

c = tasa de reproducción de depredadores por presa consumida

d = tasa de mortalidad de depredadores

Del modelo de Lotka-Volterra se tiene que:

1. El término xy modela el número de encuentros entre el depredador y la presa.
2. La competencia o la interacción entre las especies está dada por xy .
3. Al no existir encuentros entre las especies, los depredadores tienden a extinguirse.
4. Cada especie sigue un crecimiento logístico.

Además, se pueden elaborar modelos siguiendo el ciclo biológico de la población pero estos modelos necesitan varios parámetros biológicos (Ciancio, 2008).

Fundamento para la selección del modelo

Se seleccionaron los modelos de regresión lineal y de Lotka-Volterra por adecuarse a las necesidades de la presente investigación. Los modelos lineales permiten mostrar la dependencia de la población respecto a la fenología del cultivo y las variables climáticas y el modelo presa-depredador, adecuándose a la población que se estudia, permite simular la dinámica plaga – enemigos naturales.

1.3 Métodos numéricos para la simulación de modelos matemáticos

Los métodos numéricos son técnicas para formular problemas matemáticos de tal forma que puedan resolverse usando operaciones aritméticas (Riveros Huamán, 2018).

Entre los más utilizados están los siguientes:

Método de Euler

El método de Euler es el más simple de los métodos numéricos para resolver un problema de valor inicial del tipo:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \\ y(x_f) &= ? \end{aligned} \right\} \quad 1.1$$

Consiste en dividir el intervalo que va de x_0 a x_f en n subintervalos de ancho h ; es decir

$$h = \frac{x_f - x_0}{n}$$

de manera que se obtiene un conjunto discreto de $(n + 1)$ puntos: $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ del intervalo de interés $[x_0, x_f]$. Para cualquiera de estos puntos se cumple que $x_i = x_0 + i \cdot h, 0 \leq i \leq n$

Se nota la similitud de este desarrollo con el primer paso de la integración numérica. La condición inicial $y(x_0) = y_0$ representa el punto $P_0 = (x_0, y_0)$ por donde pasa la curva solución de la ecuación 1.1, la cual por simplicidad se denotará como $F(x)=y$, en lugar de $F(x, y, c_1)=0$. Con el punto P_0 se puede evaluar la primera derivada de $F(x)$ en ese punto; a saber

$$F'(x) = \frac{dy}{dx} \Big|_{P_0} = f(x_0, y_0)$$

Con esta información se traza una recta, que pasa por P_0 y de pendiente $f(x_0, y_0)$. Esta recta aproxima $F(x)$ en una vecindad de x_0 . Tómese la recta como remplazo de $F(x)$ y localícese en ella (la recta) el valor de y correspondiente a x_1 . Entonces, de

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = f(x_0, y_0)$$

Se resuelve para y_1

$$y_1 = y_0 + (x_1 - x_0)f(x_0, y_0) = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

Se evidencia que la ordenada y_1 calculada de esta forma no es igual a $F(x_1)$, pues hay un pequeño error. Aunque, el valor y_1 sirve para aproximar $F'(x)$ en el punto $P = (x_1, y_1)$ y repetir el procedimiento anterior a fin de generar la sucesión de aproximaciones siguiente:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0) \\ y_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1) \\ &\vdots \\ y_{i+1} &= y_i + hf(x_i, y_i) \\ &\vdots \\ y_n &= y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{aligned}$$

En realidad, se trata de aproximar la curva $y = F(x)$ por medio de una serie de segmentos de línea recta.

La aproximación a una curva mediante una línea recta no es exacta, por lo que se incurre en un error propio del método, el cual se denomina error de truncamiento. Dicho error puede disminuirse tanto como se quiera (al menos teóricamente) aminorando el valor de h , pero a cambio de un mayor número de cálculos y tiempo de máquina y, por tanto, de un error de redondeo más elevado (Nieves Hurtado y Domínguez Sánchez, 2014).

Método de Taylor

Uno de los métodos numéricos más antiguos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias es el método de Taylor. En el problema de valor inicial,

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0, \quad y \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}$$

El valor de la solución en t_i (o sea, $y(t_i)$) se aproxima a partir del polinomio de Taylor de grado n de $y(t)$ en $t = t_i$. La función f debe ser una función suave. A continuación, se toma f como analítica. Denotando $h_i = t_i - t_{i-1}$,

$$y(t_0) = y_0,$$

$$y(t_i) \approx y_i = y_{i-1} + \frac{dy(t_{i-1})}{dt} h_i + \frac{1}{2!} \frac{d^2 y(t_{i-1})}{dt^2} h_i^2 + \dots + \frac{1}{n!} \frac{d^n y(t_{i-1})}{dt^n} h_i^n$$

Por tanto, el problema se reduce a la determinación de los coeficientes de Taylor,

$$\{1/J! \, d^J y(t_{i-1}) / dt^J\}$$

El procedimiento proviene de la derivación del lado derecho de la ecuación diferencial, $f(t, y(t))$ (Barrio, Blesa y Lara, 2005).

En el método de Taylor, el error disminuye al aumentar el orden del polinomio y se logran muy buenas aproximaciones. No obstante, esto requiere más cálculos.

Métodos de Runge-Kutta (RK)

Los métodos Runge-Kutta son métodos de un solo paso, seguramente uno de los más utilizados, así como uno de los más precisos, usados para obtener soluciones aproximadas para un problema con valor inicial. Es preciso señalar que los métodos de Runge-Kutta son generalizaciones de la fórmula básica de Euler. Por esto, se dice que el método de Euler es un método de Runge-Kutta de primer orden (Segarra-Escandón, 2020).

El método de Runge-Kutta permite prescindir del cálculo y evaluación de las derivadas de $f(t, y)$, dado que se basa en sustituir el problema a valor inicial por la ecuación integral equivalente (Gallego, 2015):

$$\int_{t_0}^t \frac{dy}{dt} dt = \int_{t_0}^t f(t, y) dt$$

$$y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^t f(t, y) dt$$

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(t, y) dt$$

Aproximando la última integral a través de un método numérico apropiado.

Si se fija una sucesión de puntos equiespaciados, $t_n = t_0 + nh$, como en los casos previos, que dividen el intervalo $[a, b]$ en subintervalos $[t_{n-1}, t_n]$, se obtienen los pares

(t_n, y_n) aproximando la función solución en cada uno de los valores de abscisa t_n del siguiente modo:

$$y(t_n) \approx y_n = y_{n-1} + \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(t, y) dt$$

El orden del método se debe a la cantidad de sumandos con los cuales se aproxima la integral (Gallego, 2015).

RK1

El método de Runge-Kutta de primer orden se basa en considerar la ecuación diferencial ordinaria: $y' = f(x, y)$, $y(0) = y_0$ para calcular y_{i+1} en $x_{i+1} = x_i + h$, dado un valor y_i , se integra la ecuación en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx$$

O sea, es emplear un método de integración numérica a la integral del lado derecho de la ecuación (Torres Soler, 2010).

RK2 o Euler mejorado

En este momento se utiliza el método del trapecio para aproximar la integral en cada uno de los subintervalos en los que se dividió el intervalo $[a, b]$. Este método aproxima a la integral a través del promedio de los valores extremos, por ejemplo, en el caso del primer intervalo, $[t_0, t_1]$ (Gallego, 2015).

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t, y) dt \approx \frac{h}{2} (f(t_0, y(t_0)) + f(t_1, y(t_1)))$$

Luego

$$y(t_1) \approx y_1 = y(t_0) + \frac{h}{2} (f(t_0, y(t_0)) + f(t_1, y(t_1)))$$

donde $h = t_1 - t_0$

Puesto que $y(t_1)$, término que se desea aproximar, está en la expresión de la aproximación, se aplica el método de Euler para aproximar y después calcular $f(t_1, y(t_1))$, así se obtiene que:

$$(t_1) \approx y_1 = y_0 + h_2 (f(t_0, y_0) + f(t_1, y_0 + hf(t_0, y_0)))$$

Repitiendo este procedimiento en cada intervalo $[t_n, t_{n+1}]$, esto es, usando el método de Euler para aproximar el valor que se quiere estimar y luego usando la regla del

trapecio con el objetivo de corregir la estimación, resulta y_{k+1} que es la aproximación de (t_{n+1}) .

Así la expresión general del método de Runge-Kutta de orden 2 es la siguiente (Gallego, 2015):

$$(t_{n+1}) \approx y_{n+1} = y_n + h_2 (f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_0 + hf(t_n, y_n)))$$

Comúnmente el método se muestra con las siguientes expresiones:

$$k_{n_1} = hf(t_n, y_n)$$

$$k_{n_2} = hf(t_{n+1}, y_0 + hf(t_n, y_n))$$

$$y(t_{n+1}) \approx y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

RK4

El método de Runge-Kutta 4 (RK4) evalúa cuatro veces a la función f . Específicamente, este método realiza cuatro pasos, por lo que requiere mayor coste que los métodos de Runge-Kutta de orden menor (RK1, RK2, RK3), aunque, es más preciso (Di Pietro, 2019).

El método clásico de Runge-Kutta de orden 4 es el siguiente (Pereira López, 2021):

$$K_1 = f(t, x)$$

$$K_2 = f(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}K_1)$$

$$K_3 = f(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}K_2)$$

$$K_4 = f(t + h, x + hK_3)$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4]$$

Método de Adams-Bashforth-Moulton de 4 orden

Es un método multipasos. Similar al método de Euler mejorado es un método de predicción-corrección, o sea, se utiliza una fórmula para predecir un valor y_{n+1}^* , que a su vez se usa para obtener un valor corregido y_{n+1} . La predicción en este método es la fórmula de Adams-Bashforth.

$$y_{n+1}^* = y_n + \frac{h}{24}(55y'_n - 59y'_{n-1} + 37y'_{n-2} - 9y'_{n-3})$$

$$y'_n = f(x_n, y_n)$$

$$y'_{n-1} = f(x_{n-1}, y_{n-1})$$

$$y'_{n-2} = f(x_{n-2}, y_{n-2})$$

$$y'_{n-3} = f(x_{n-3}, y_{n-3})$$

para $n \geq 3$. Posteriormente se sustituye el valor de y^*_{n+1} en la corrección de Adams-Moulton

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} (9y'_{n+1} + 19y'_n - 5y'_{n-1} + y'_{n-2})$$

$$y'_{n+1} = f(x_{n+1}, y^*_{n+1})$$

La fórmula inicial de este método necesita conocer los valores de y_0 , y_1 , y_2 y y_3 para obtener y_4 . Evidentemente, el valor de y_0 es la condición inicial dada. El error de truncamiento local del método de Adams-Bashforth-Moulton es $O(h^5)$, los valores de y_1 , y_2 y y_3 se calculan generalmente con un método con la misma propiedad de error, tal como el de Runge-Kutta orden cuatro (Zill, 2009).

Fundamento para la selección del método matemático

Se seleccionó el método de **Runge-Kutta 4 (RK4)** por ser uno de los más utilizados a nivel mundial pues, evalúa cuatro veces la función y realiza cuatro pasos, lo que lo coloca como uno de los más precisos de los métodos numéricos empleados en la simulación de ecuaciones matemáticas.

1.4 Softwares implementados para predecir plagas agrícolas

Diversos softwares se han implementado a nivel mundial con el objetivo de predecir plagas agrícolas.

En Perú, León, Díaz y Rodríguez (2020) crearon un software que gestiona, utilizando un dron, un sistema de visión artificial el cual detecta los daños causados por plagas en el cultivo de aguacate.

En Colombia, Rojas Carvajal (2021) desarrolló un sistema de telemetría capaz de monitorear el estado de un campo de cultivo de café mediante el uso de un GPS, un dron, una cámara espectral y comunicaciones inalámbricas. Ortiz Daza (2021) implementó en MatLab una herramienta computacional llamada NeuroPI – 2105 basada en una red neuronal convolucional para el diagnóstico del tizón tardío en cultivos de papa que clasifica dos tipos de folios (sanos y enfermos). Esta herramienta también funciona con el manejo de imágenes.

En España, García Onsurbe (2020) realiza un estudio computacional de la dinámica y el control poblacional de plagas mediante el software SimKinet. Dicho software fue creado, por un grupo de investigadores del Centro Universitario de la Defensa en España, para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden aplicadas a la cinética-química.

En Ecuador, Choloquina y Reyes (2020) desarrollaron un software (aplicación móvil) de aprendizaje profundo que optimiza el diagnóstico de plagas en hojas de cultivos de papas, usando el procesamiento de imágenes.

El software ILCYM 4.0 (Insect Life Cycle Modeling), ha sido desarrollado por el Centro Internacional de la Papa (CIP); permite determinar las zonas de alto riesgo de propagación de una plaga y generar un sistema de alerta mediante los indicadores de riesgo diarios que genera este programa (Gamarra *et al.*, 2020). Aunque este software es una buena alternativa a utilizar en un ecosistema cubano, no es accesible desde este país.

Existen softwares de pago como FuturCrop, que automatiza la supervisión de las condiciones de desarrollo de las plagas y establece un sistema de prevención y alertas de riesgo, técnicos y productores tienen la información que les permite eliminar tratamientos preventivos, optimizar el tiempo de monitoreo y planificar los tratamientos para que sean más eficientes en sus cultivos (Prieto, 2018). También el software CLIMEX-DYMEX, donde, el componente CLIMEX predice el efecto del cambio climático en la distribución de especies, utilizando técnicas de simulación y modelado. CLIMEX intenta imitar los mecanismos biológicos que limitan la distribución geográfica de las especies y determinan su fenología estacional y abundancia relativa. Por otro lado, DYMEX es un paquete de modelado modular

que permite al usuario desarrollar y ejecutar rápidamente modelos de población deterministas de organismos biológicos. Estos modelos de población se estructuran en torno a los ciclos de vida de las especies, que a su vez consisten en las etapas de crecimiento por las que pasan los individuos durante su vida (Hearne Software, 2022).

En Cuba, Falcón Suárez (2020) desarrolló una aplicación web de apoyo para el análisis de datos agrícolas en las bases productivas. En la misma existe un apartado para la gestión de plagas, pero no incluye la predicción en el mismo.

Fundamento para la selección de software

Ningún software de los presentados fue seleccionado, pues no satisfacen las necesidades de la presente investigación, ya sea por la utilización de parámetros diferentes, la complejidad en su uso o por limitaciones relacionadas con la zona geográfica o economía. Por lo que, teniendo en cuenta que se elaborará un modelo propio para simular la dinámica de la plaga, se plantea desarrollar una aplicación (software) de elaboración propia que satisfaga dichas necesidades.

Capítulo 2. MATERIALES Y MÉTODOS

El Capítulo 2 tuvo como objetivo describir métodos y herramientas utilizadas en la investigación.

El Epígrafe 2.1 puntualizó los métodos y las metodologías empleadas para desarrollar la investigación y cómo apoyan el alcance de los resultados. El Epígrafe 2.2 estableció modelos matemáticos que estiman la densidad poblacional de los trips. En el Epígrafe 2.3 se realizó un estudio de la estabilidad del modelo seleccionado. El Epígrafe 2.4 detalló las principales herramientas que se utilizaron y sus bondades.

2.1 Métodos y metodologías empleados en la investigación

Entre los métodos de trabajo científico utilizados se destacan los siguientes:

- **Análisis-síntesis**, para el estudio de las fuentes bibliográficas existentes referente al tema, identificando los elementos más importantes y necesarios para solucionar el problema planteado.
- **Histórico-lógico**, con el fin de realizar un estudio de cómo han evolucionado los modelos matemáticos y los métodos numéricos, y las tendencias actuales.
- **Inductivo-deductivo**, para el estudio de las principales iniciativas del modelo a desarrollar en la presente investigación, y los modelos existentes utilizados en la simulación de la dinámica de poblaciones, con el fin de lograr una comparación entre ellos.
- **Modelación**, para la representación explícita de la solución propuesta a través de los modelos de procesos de revisión y de interoperabilidad, así como las ideas y referentes teóricos extraídos de las fuentes bibliográficas consultadas.
- **Sistémico estructural**, para modelar la arquitectura del modelo y establecer la relación entre los componentes identificados.
- **Análisis documental**, en la consulta de la literatura especializada en las temáticas afines a la investigación.
- **Cuasi experimento**, con el objetivo de validar la propuesta en base a un caso práctico, en la finca “Maravilla”, en la provincia Artemisa.

- **Grupo focal**, con el fin de que especialistas en la temática que se aborda en la investigación aporten ideas innovadoras, siempre con el objetivo de lograr una propuesta lo más acertada posible. Además, para la validación de la propuesta como un método cualitativo a tener en cuenta en la triangulación metodológica.
- **Técnica de ladov**, para el estudio de la satisfacción de los usuarios con el modelo desarrollado.

Los métodos científicos presentados en la investigación posibilitan la triangulación metodológica, con el objetivo de confirmar de forma simultánea los resultados obtenidos en el **grupo focal**, **cuasi experimento** y la **técnica de ladov**.

2.2 Modelación matemática

Primeramente, se propuso un modelo lineal que describe la relación de la densidad de la población (variable en estudio) con la edad del cultivo. Posteriormente, se incluyeron variables climáticas como otras variables independientes que regulan la población. Con el objetivo de mejorar la precisión en la estimación de la densidad poblacional de los trips, se elaboró un modelo matemático teórico según la descripción del ciclo biológico del insecto y su interacción con los depredadores. Finalmente, se elaboró un modelo más simple para caracterizar el ciclo de la población total del fitófago en interacción con los depredadores, a fin de demostrar la existencia o no de un equilibrio ecológico.

Modelo 1

$$y = a + bE + cE^2$$

Donde:

a, b, c – parámetros a estimar

E – edad del cultivo

Modelo 2

$$\log(y) = a + bE + cE^2 + dHrA + ePPA + f\log(35 - T)$$

Donde:

a, b, c, e, f – parámetros a estimar

E – edad del cultivo

HrA – Humedad relativa antes del muestreo

PPA – Precipitación acumulada antes del muestro

T – Temperatura media antes del muestreo

Modelo 3 (Basado en el ciclo biológico de la plaga)

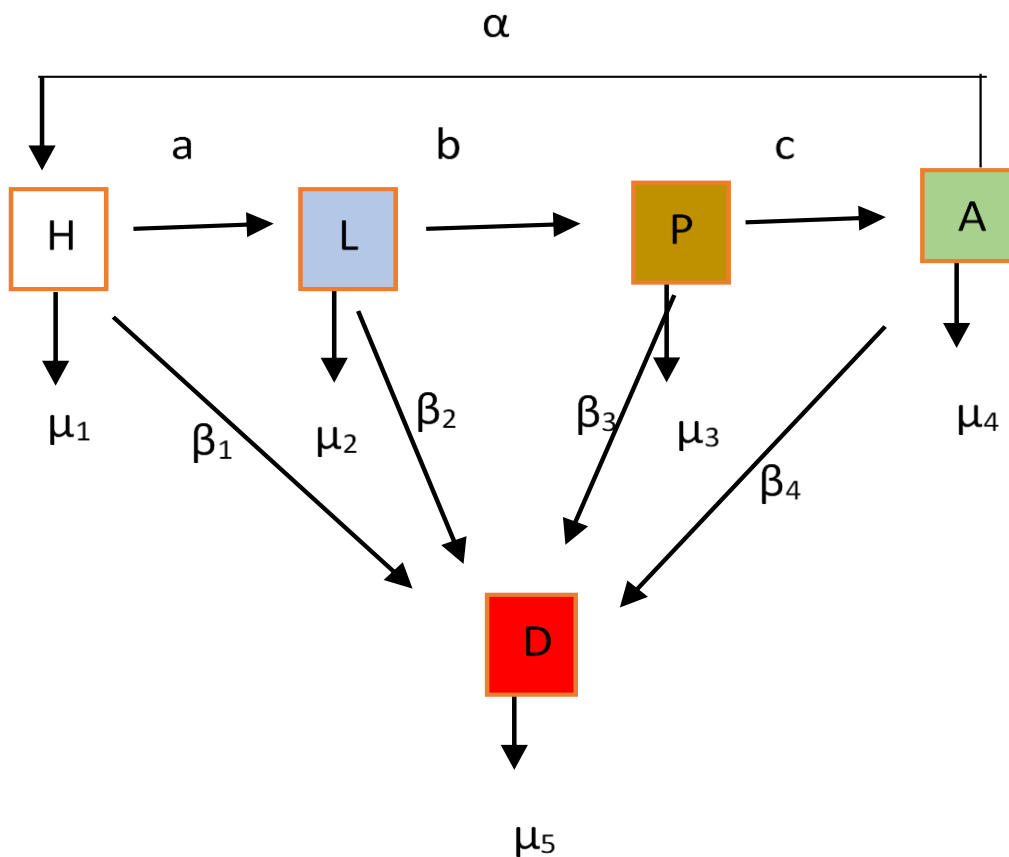


Figura 1. Modelo 3. Interacción presa-depredador que representa la relación *Thrips spp.* – enemigos naturales.

Modelo 4 (Sistema de ecuaciones de presa-depredador)

El modelo general de Lotka-Volterra ha sufrido varias modificaciones, puesto que todas las relaciones que se establecen entre dos o más especies no son

necesariamente del mismo tipo. Por ello se han desarrollado modelos como: presa-depredador con competencia intraespecífica, modelo competitivo de Lotka-Volterra (dos especies), modelo cooperativo de Lotka-Volterra para dos especies (Gopalsamy, 1985). Para el caso de estudio, se utilizó sistema de competencia Lotka-Volterra con dos especies propuesto por Gopalsamy (1985).

$$\frac{dX}{dt} = aX - bXY - cXX$$

$$\frac{dY}{dt} = -dY + eXY - fYY$$

Tabla 1. Parámetros y significado biológico del modelo 4

Parámetro	Significado biológico
X	Presa
Y	Depredador
a	Tasa de crecimiento de las presas
b	Éxito del depredador
c	Tasa de competencia interespecífica de las presas
d	Mortalidad natural del depredador
e	Índice de respuesta numérica del depredador
f	Tasa de competencia interespecífica de los depredadores

Escenarios para la simulación

La condición inicial se tomó del monitoreo periódico de la población de tisanópteros realizado en un cuadrante de 7,71 ha de la finca Maravilla en la Empresa de Cultivos Varios (E.C.V.) de Artemisa, donde se realizaron y registraron todas las operaciones establecidas para el cultivo según las normas técnicas, excepto que se mantuvo sin tratamiento de insecticidas químicos o biológicos durante su ciclo (Elizondo Silva y Murguido Morales, 2006). Los parámetros poblacionales para el Modelo 4 fueron tomados de la literatura (Elizondo Silva, *et al.*, 2016; Román, 2017; González y Hernández, 2018) y se empleó el método RK4 para la simulación.

Para el modelo 2 se tomaron los datos climáticos correspondientes a las estaciones meteorológicas aledañas a los territorios donde se montaron los experimentos y se utilizó una variable considerada en el estudio de dinámica, diseñada a partir de la diferencia entre el umbral máximo teórico para especies de trips y la temperatura media $[\log(35 - T)]$ (Cortiñas Abrahantes, Jiménez Jiménez y Reyes Tornos, 2003).

Estos datos también se emplearon para verificar la bondad de ajuste en la predicción de la densidad de los tisanópteros, según la raíz del cuadrado medio de error (RCME), el coeficiente de determinación, el coeficiente de determinación ajustado, el error estándar y la prueba de Durbin-Watson para los modelos de regresión.

El efecto de cada error en la RCME es proporcional al tamaño del error cuadrado; por lo cual, los errores mayores tienen un resultado desproporcionadamente grande en la RCME. Por tanto, la RCME es sensible a los valores atípicos (Willmott y Matsuura, 2006; Pontius, Thontteh y Chen, 2008). Se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$RCME = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (real_i - estimado_i)^2}$$

Donde, M es el número de observaciones.

El coeficiente de determinación, denominado R^2 , es una medida de la bondad del ajuste para una ecuación de regresión. Mide el porcentaje de variación total que es explicada por la ecuación de regresión (Acosta, Laines y Piña, 2014). Tiene como propósito principal predecir futuros resultados o probar una hipótesis. El coeficiente determina la calidad del modelo para replicar los resultados, y la proporción de variación de los resultados que puede explicarse por el modelo (Steel y Torrie, 1960). Su fórmula es la siguiente:

$$R^2 = \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_X^2 \sigma_Y^2}$$

Donde,

σ_{XY} es la covarianza de (X,Y)

σ_X^2 es la Varianza de la variable (X)

σ_Y^2 es la Varianza de la variable (Y)

Si se introducen variables excesivas al modelo, el coeficiente de determinación incrementará su valor, por tal razón se suele calcular el coeficiente de determinación ajustado (Acosta, Laines y Piña, 2014).

$$R^2_{aj} = 1 - (1 - R^2) \frac{N - 1}{N - k - 1}$$

Donde,

N es el tamaño de la muestra y k el número de variables explicativas.

El estadístico de Durbin-Watson (DW) examina los residuos para determinar si hay alguna correlación significativa basada en el orden en el que se presentan en el archivo de datos. Si el p-valor es pequeño, se rechaza la hipótesis de independencia (StatPoint, Inc, 2007). Su fórmula es:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^T (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^T e_t^2}$$

Donde T es el número de observaciones.

Estudio de estabilidad del modelo

Se estudió la estabilidad de los puntos de equilibrio del modelo 4 (presa-depredador). Para ello se empleó el Teorema de Hartman-Grobman que expresa que si la matriz Jacobiana del sistema, evaluada en el punto de equilibrio P, posee valores propios con parte real nula entonces P es asintóticamente estable y si todos los valores propios tienen parte real negativa P es estable. Se empleó también el método de Lyapunov, que especifica que si todos los valores característicos de la matriz tienen parte real negativa, entonces el origen 0 es una posición de reposo asintóticamente estable y en particular estable (Benítez García, 2019).

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= aX - bXY - cX^2 \\ \frac{dY}{dt} &= -cY + dXY - eY^2 \end{aligned}$$

Los puntos de equilibrio son:

$$P_1: (0; 0)$$

$$P_2: (0; y)$$

$$P_3: (x; 0)$$

$$P_4: (x; y)$$

2.3 Herramientas informáticas para la simulación matemática

Para el análisis estadístico de los resultados de las simulaciones se utilizó R (v. 4.1.2), al cual se le instalaron varios paquetes estadísticos que enriquecen este sistema y como entorno de desarrollo integrado (IDE) se utilizó RStudio (v. 2021.09.2+382). Dichas herramientas y paquetes de software se explican a continuación.

R es un sistema de cálculo estadístico y gráficos. Consiste en un lenguaje más un entorno de tiempo de ejecución con gráficos, un depurador, acceso a ciertas funciones del sistema y la capacidad de ejecutar programas almacenados en archivos de script.

El núcleo de R es un lenguaje informático interpretado que permite la ramificación y el bucle, así como la programación modular mediante funciones. La mayoría de las funciones visibles para el usuario en R están escritas en R. Es posible que el usuario interactúe con los procedimientos escritos en los lenguajes C, C++ o FORTRAN para mayor eficiencia. La distribución R contiene funcionalidad para una gran cantidad de procedimientos estadísticos. Entre estos se encuentran: modelos lineales y lineales generalizados, modelos de regresión no lineal, análisis de series de tiempo, pruebas clásicas paramétricas y no paramétricas, agrupamiento y suavizado. También hay un gran conjunto de funciones que proporcionan un entorno gráfico flexible para crear varios tipos de presentaciones de datos. Los módulos adicionales ("paquetes complementarios") están disponibles para una variedad de propósitos específicos. R posee una página de inicio en <https://www.R-project.org/>. Es software libre distribuido bajo un copyleft estilo GNU, y una parte oficial del proyecto GNU ("GNU S") (Ihaka y Gentleman, 1996).

El entorno de desarrollo integrado (IDE) RStudio añade características modernas como resaltado de sintaxis y refactorización de código a R. La fortaleza de RStudio es que reúne todas las funciones que necesita en un solo lugar. Antes de instalar RStudio, se necesita instalar la última versión de R para nuestro sistema operativo (Campbell, 2020).

Para el desarrollo de la aplicación se utilizaron, además, las siguientes librerías de R.

Shiny (v. 1.7.1)

Shiny es un paquete de R que facilita la creación de aplicaciones web interactivas directamente desde R. Puede alojar aplicaciones independientes en una página web o incrustarlas en documentos de R Markdown o crear paneles. Shiny también puede ampliar las aplicaciones con temas CSS, widgets html y acciones de JavaScript. Shiny combina el poder computacional de R con la interactividad de la web moderna. El enlace "reactivo" automático entre entradas y salidas y los extensos widgets preconstruidos hacen posible crear aplicaciones atractivas, con capacidad de respuesta y potentes con un esfuerzo mínimo (Chang *et al.*, 2021; Shiny, 2022).

readxl (v. 1.4.0)

El paquete readxl facilita la transferencia de datos de Excel a R. En comparación con muchos de los paquetes existentes (por ejemplo, gdata, xlsx, xlsReadWrite), readxl no tiene dependencias externas, por lo que es fácil de instalar y usar en todos los sistemas operativos. Está diseñado para trabajar con datos tabulares.

readxl admite tanto el formato .xls heredado como el formato .xlsx moderno basado en xml. La biblioteca libxls C se usa para admitir .xls, lo que abstrae muchas de las complejidades del formato binario subyacente. Para analizar .xlsx, se usa la biblioteca RapidXML C++. Funciona en Windows, Mac y Linux sin dependencias externas. (Wickham *et al.*, 2022; Read Excel Files, 2022).

deSolve (v. 1.32)

El paquete deSolve es un paquete complementario del sistema de análisis de datos de open-source R para el tratamiento numérico de sistemas de ecuaciones diferenciales.

El paquete contiene funciones que resuelven problemas de valor inicial de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE) de primer orden, de ecuaciones diferenciales parciales (PDE), de ecuaciones algebraicas diferenciales (DAE) y de ecuaciones diferenciales de retardo (DDE). Las funciones proporcionan una interfaz a las funciones FORTRAN Isoda, Isodar, Isode, Isodes de la colección ODEPACK, a las funciones FORTRAN dvode, zvode, daspk y radau5, y una implementación en C de solucionadores de la familia Runge-Kutta con pasos de tiempo fijos o variables. El paquete también contiene rutinas diseñadas para resolver ODE resultantes de ecuaciones diferenciales parciales (PDE) 1-D, 2-D y 3-D que se han convertido en ODE por diferenciación numérica (Soetaert *et al.*, 2022).

laticce (v. 0.20-45)

El paquete laticce es un potente y elegante sistema de visualización de datos de alto nivel inspirado en los gráficos de Trellis, con énfasis en datos multivariados. Lattice satisface las necesidades gráficas típicas y también es lo suficientemente flexible para manejar la mayoría de los requisitos no estándar (Sarkar *et al.*, 2021).

lmtest (v. 0.9-40)

El paquete lmtest se compone de una colección de pruebas, conjuntos de datos y ejemplos para la verificación de diagnóstico en modelos de regresión lineal. Además, proporciona algunas herramientas genéricas para la inferencia en modelos paramétricos (Hothorn *et al.*, 2022).

plotly (v. 4.10.0)

La biblioteca de gráficos R de Plotly crea gráficos interactivos con calidad de publicación, como diagramas de líneas, diagramas de dispersión, gráficos de área, gráficos de barras, barras de error, diagramas de caja, histogramas, mapas de calor,

subgráficos, gráficos de ejes múltiples y gráficos 3D (basados en WebGL). Plotly.R es gratuito y de código abierto (Sievert *et al.*, 2021).

ggplot2 (v. 3.3.6)

ggplot2 es un sistema para crear gráficos declarativamente, basado en The Grammar of Graphics. Se proporcionan los datos, se señala cómo asignar variables a la estética, qué gráficos usar y ggplot2 se ocupa de los detalles (Wickham *et al.*, 2022, p. 2).

Capítulo 3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En el presente capítulo se muestra la bondad de ajuste de cada uno de los modelos seleccionados y las gráficas de los mismos. Además, se da la interpretación biológica de los puntos de equilibrio del sistema y su estabilidad. Finalmente, se presenta el software desarrollado.

3.1 Modelo matemático que describe la fluctuación poblacional de trips en papa

Modelo de regresión Edad

Para los datos que se emplean resulta la ecuación:

$$y = -5,16 + 0,4E - (-0,003E^2)$$

Este modelo resultó adecuado. Según el valor de R^2 ajustado, la edad fenológica del cultivo explica más del 80% de la variabilidad de la densidad de la plaga. El estadígrafo de DW no fue significativo (Tabla 2). Calculando el cero de la primera derivada del modelo se obtiene que el valor máximo se alcanza aproximadamente a los 66 días después de la siembra, lo cual no coincide con lo que ocurre realmente, puesto que el pico de la plaga ocurre después de los 45 días.

Tabla 2. Nivel de predicción del modelo Plaga - Edad

Edad	P. observada	P. estimada	Bondad de ajuste
11,00	0,00	0,00	RCME: 1,04
18,00	0,60	0,94	R^2 : 0,85
25,00	1,50	2,73	R^2 ajustado: 0,81
32,00	2,50	4,20	Error std.: 0,86
39,00	6,00	5,34	DW: 1,39, p-valor: 0,0675
46,00	7,90	6,15	
55,00	7,60	6,71	
62,00	5,90	6,78	
69,00	6,20	6,52	

La RCME siempre es no negativa, y un valor de 0 significaría un ajuste perfecto a los datos, lo cual sucede muy raras veces en la práctica. En general, una RCME más baja es mejor que una más alta. Aunque, las comparaciones entre diferentes tipos de datos no serían válidas porque la medida depende de la escala de los números utilizados (Willmott y Matsuura, 2006; Pontius, Thontteh y Chen, 2008).

Según el valor de RCME resultante del análisis, este modelo presentó una bondad de ajuste adecuada.

Un valor de R^2 cercano a uno significa que la ecuación es muy exacta porque explica una gran porción de la variabilidad. Si se demuestra que el(los) coeficientes es(son) significativamente diferentes de cero entonces ese será el mejor modelo, caso contrario se debe pasar a evaluar el siguiente modelo que tenga mayor R^2 ajustado hasta encontrar un modelo con coeficientes significativamente diferentes de cero (Acosta, Laines y Piña, 2014). Los resultados de R^2 y el R^2 ajustado en el modelo 1 muestran que este explica suficientemente la variable en estudio.

Si el estadístico de Durbin-Watson es sustancialmente menor que 2, hay evidencia de correlación serial positiva. Como regla general, si el estadístico de Durbin-Watson es inferior a 1, puede ser causa de alarma. Valores pequeños de DW indican que los términos de error sucesivos están correlacionados positivamente. Si $DW > 2$, los términos de error sucesivos están correlacionados negativamente. En las regresiones, esto puede implicar una subestimación del nivel de significación estadística (Gujarati, Porter and Gunasekar, 2012). Este modelo demuestra que hay una evidencia de correlación serial positiva.

Gráfica del modelo

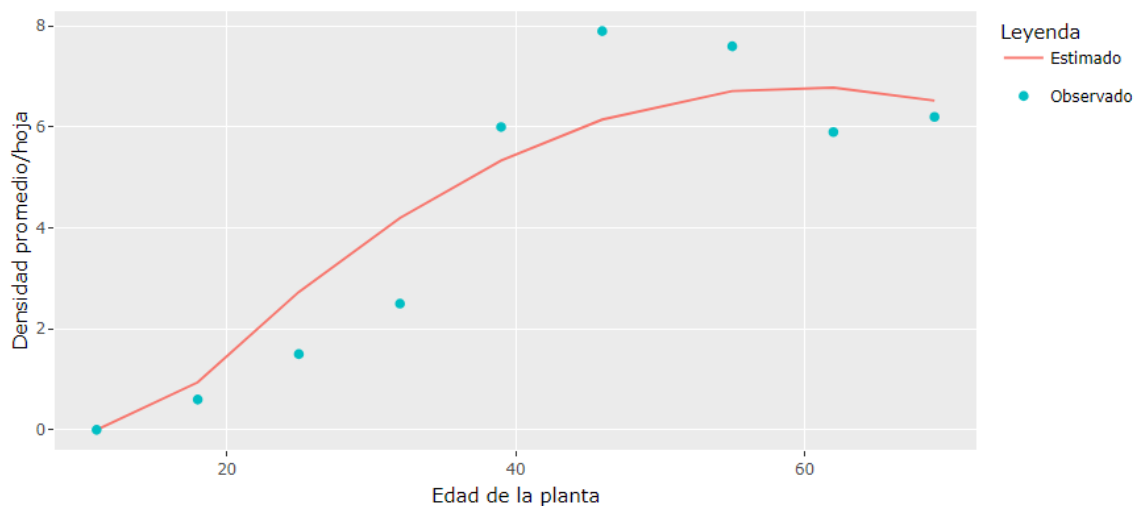


Figura 2. Gráfica del modelo 1 para los datos de muestreo en *S. Tuberosum* L., Artemisa, 2002.

Modelo de regresión Edad - Clima

Para los datos empleados resultó la ecuación:

$$\log(y) = 18,14 - 11,91\log(35 - T) - 0,18\text{HrA} + 0,04\text{PPA} + 0,41\text{E} - 0,004\text{E}^2$$

Este modelo presenta muy malos resultados de forma general. Presenta valores elevados de RCME y de error estándar, lo cual demuestra poco ajuste a los datos. A pesar de que presenta un buen R^2 , que parece indicar que el modelo explica suficientemente las variables en estudio, se observa un R^2 ajustado muy pobre. El valor de DW es pequeño y el p-valor es menor que 0,05, por lo que se puede rechazar la hipótesis nula y concluir que los residuos en este modelo están autocorrelacionados (Tabla 3).

Tabla 3. Nivel de predicción del modelo Plaga - Edad - Clima

Edad	P. observada	P. estimada	Bondad de ajuste
11,00	0,00	0,00	RCME: 16,17
18,00	0,60	0,00	R^2 : 0,87
25,00	1,50	1,14	R^2 ajustado: 0,64
32,00	2,50	17,44	Error std.: 5,42
39,00	6,00	50,07	DW: 0,47, p-valor: 0,0016
46,00	7,90	2,03	
55,00	7,60	14,27	
62,00	5,90	0,93	
69,00	6,20	15,29	

Gráfica del modelo

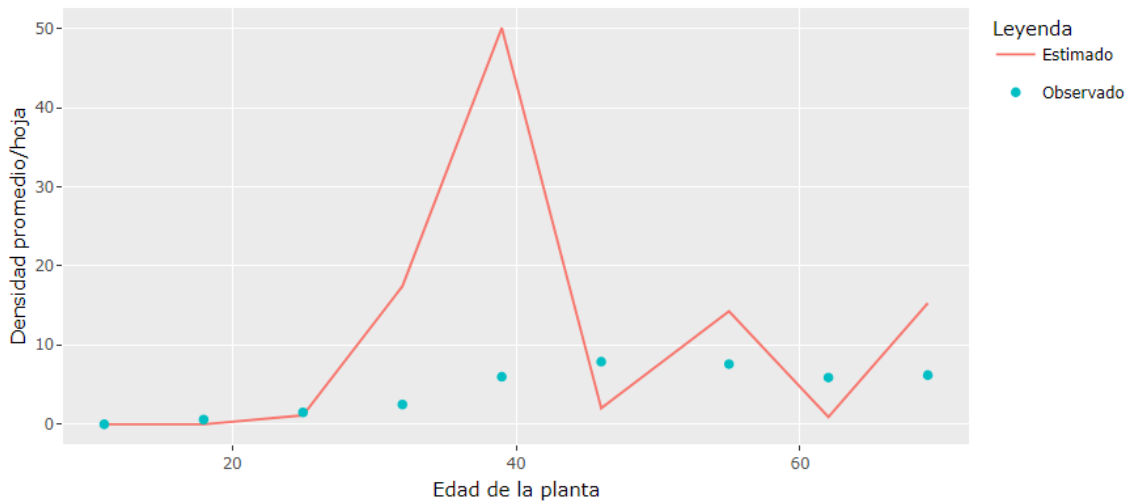


Figura 3. Gráfica del modelo 2 para los datos de muestreo en *S. Tuberosum* L., Artemisa, 2002.

La mala bondad de ajuste puede deberse a la no inclusión de los enemigos naturales en el modelo o las tácticas que emplearon los agricultores para mitigar las acciones del clima, puesto que conocen que alrededor de 40 días después de la siembra las plagas proliferan cuando la humedad y las temperaturas le son favorables (Elizondo Silva and Murguido Morales, 2006).

Aun cuando el modelo no predijo la densidad poblacional sirve para indicar que, según el clima de la zona y la fenología del cultivo, cuando no se aplican tácticas de manejo, hay alta probabilidad de ocurrencia de un pico poblacional entre los 35 y los 45 días después de la siembra (Fig. 3), el momento varía en dependencia de la variedad empleada.

Modelo del ciclo biológico

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dH}{dt} = \alpha A - \mu_1 H - aH - \beta_1 HD \\ \frac{dL}{dt} = aH - \mu_2 L - bL - \beta_2 LD \\ \frac{dP}{dt} = bL - \mu_3 P - cP - \beta_3 PD \\ \frac{dA}{dt} = cP - \mu_4 A - \beta_4 AD \end{array} \right.$$

$$\frac{dD}{dt} = \beta_1 HD + \beta_2 LD + \beta_3 PD + \beta_4 AD - \mu_5 D$$

Tabla 4. Parámetros y significado biológico del modelo 3

Parámetro	Significado biológico
α	Tasa de ovoposición del fitófago
a	% de huevos que llegan a larva
b	% de larvas que llegan a pupas
c	% de pupas que llegan a Adultos
μ_1	Tasa de huevos inviables (que no eclosionan)
μ_2	Tasa de mortalidad natural de larvas
μ_3	Tasa de mortalidad natural de pupas
μ_4	Tasa de mortalidad natural de adultos
μ_5	Tasa de mortalidad natural del depredador
β_1	Tasa de depredación para huevos
β_2	Tasa de depredación para Larvas
β_3	Tasa de depredación para Pupas
β_4	Tasa de depredación para Adultos

Este modelo no fue validado con datos reales, ya que no se cuenta con todos los parámetros necesarios (Tabla 4).

Modelo Presa - Depredador

$$\frac{dX}{dt} = 0.92X - 0.36XY - 0XX$$

$$\frac{dY}{dt} = -0.14Y + 0.2XY - 0.25YY$$

Tabla 5. Nivel de predicción del modelo Presa - Depredador

Edad	P. observada	P. estimada	D. estimado	Bondad de ajuste
11,00	0,00	0,36	0,92	RCME: 1,28
18,00	0,60	0,67	0,72	R ² : 0,91
25,00	1,50	1,33	0,64	R ² ajustado: 0,90
32,00	2,50	2,63	0,70	Error std.: 0,81
39,00	6,00	4,90	1,03	
46,00	7,90	7,21	2,12	
55,00	7,60	6,28	3,59	
62,00	5,90	4,22	3,54	
69,00	6,20	3,33	2,89	

En este modelo la variabilidad de las variables explicativas explica aproximadamente el 91% la de la estudiada. Este modelo es, además, el de mejor

R^2 ajustado entre los modelos propuestos. En general, presenta excelentes valores de bondad de ajuste que validan su uso para la estimación de las poblaciones de trips con relación a sus depredadores.

Gráfica del modelo

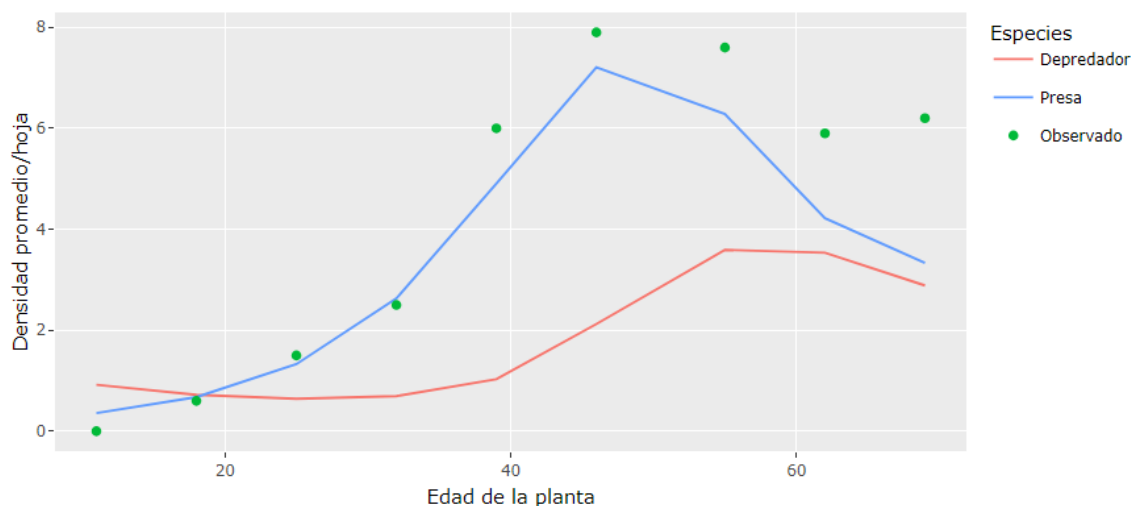


Figura 4. Gráfica del modelo 4 para los datos de muestreo en *S. Tuberosum* L., Artemisa, 2002.

Tabla general de los modelos presentados

Tabla 6. Bondad de ajuste de los tres modelos

	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 4
RCME:	1,04	16,17	1,28
R^2 :	0,85	0,87	0,91
R^2 ajustado:	0,81	0,64	0,90
Error std:	0,86	5,42	0,81
Durbin-Watson:	dw: 1,39 p-valor: 0,0675	dw: 0,47 p-valor: 0,0016	

Gráfico general de los modelos presentados

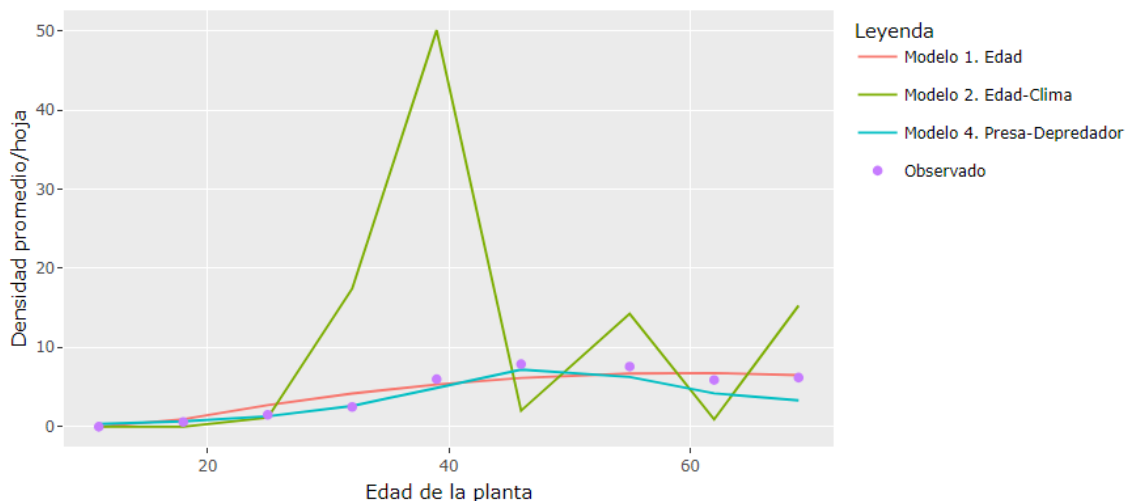


Figura 5. Gráfica de los tres modelos analizados para los datos de muestreo en *S. Tuberosum* L., Artemisa, 2002.

Se seleccionó el modelo 4 por ser, de forma general, el de mejor bondad de ajuste (Tabla 6). Presenta excelentes valores de R^2 , R^2 ajustado y el menor error estándar entre los tres modelos propuestos.

3.2 Equilibrio del Agro-ecosistema: planta (*S. tuberosum* L.) – plaga (Trips) – Enemigos naturales (depredadores)

Se calcularon los puntos de equilibrio, para ello, se calcularon los ceros del sistema de ecuaciones:

$$ax - bxy - cx^2 = 0$$

$$-dy + exy - fy^2 = 0$$

Resultando,

$$P_1: (0; 0) \quad (3.1)$$

$$P_2: (0; -\frac{d}{f}) \quad (3.2)$$

$$P_3: (\frac{a}{c}; 0) \quad (3.3)$$

$$P_4: (\frac{af + bd}{be + cf}; \frac{ae - cd}{be + cf}) \quad (3.4)$$

Matriz Jacobiana

$$J \begin{bmatrix} a - by - 2cx & -bx \\ ey & -d + ex - 2fy \end{bmatrix}$$

De 3.1 se obtiene la matriz

$$J \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}$$

El polinomio característico es

$$P_1(\lambda) = (\lambda - a)(d + \lambda)$$

Por tanto, los valores propios para el sistema son

$$\lambda_1 = a$$

$$\lambda_2 = -d$$

Como $\lambda_1 = a$, todos los valores propios no tienen parte real negativa. Esto significa que la posición de equilibrio no es estable.

Puesto que $P_1(0; 0)$ es inestable, entonces, implica que las poblaciones de trips surgirán en algún momento del cultivo y, posteriormente, aparecerán los depredadores.

De 3.2 se obtiene la matriz

$$J \begin{bmatrix} a + \frac{bd}{f} & 0 \\ -\frac{de}{f} & d \end{bmatrix}$$

El polinomio característico es

$$P_2(\lambda) = \frac{(d - \lambda)(af + bd - f\lambda)}{f}$$

Los valores propios son

$$\lambda_1 = \frac{af + bd}{f}$$

$$\lambda_2 = d$$

En este punto, ninguno de los valores propios tiene parte real negativa. O sea, es inestable. En el caso de estudio, el punto sería (0; 0,56), lo que implica que, al monitorear 15 plantas, debe existir como promedio 0.56 depredadores, en caso de existir menos es necesario hacer liberaciones.

Que P_2 sea inestable, implica que, incluso cuando las poblaciones de trips sean eliminadas del cultivo por los depredadores, reaparecerán en algún momento.

De 3.3 se obtiene la matriz

$$J \begin{bmatrix} -a - \lambda & -\frac{ab}{c} \\ 0 & \frac{ae}{c} - d - \lambda \end{bmatrix}$$

El polinomio característico es

$$P_3(\lambda) = \left(\frac{(a + \lambda)(c(d + \lambda) - ae)}{c} \right)$$

Los valores propios son

$$\lambda_1 = \frac{ae - cd}{c}$$

$$\lambda_2 = -a$$

Como $\lambda_1 = (ae - cd)/c$ y $\lambda_2 = -a$, si $\frac{a}{c} < \frac{d}{e}$, todos los valores propios tienen parte real negativa, esto significa que la posición de equilibrio es estable, bajo la condición de que $\frac{a}{c} < \frac{d}{e}$. En el caso de estudio P_3 es $(\infty; 0)$. Esto implica que, al no existir competencia entre las presas, hay un punto de equilibrio donde la plaga crece indefinidamente en ausencia de depredadores lo cual hay que evitar haciendo liberaciones y/o empleando otros controles biológicos.

De 3.4 se obtiene la matriz

$$J \begin{bmatrix} a - b \frac{ae - cd}{be + cf} - 2c \frac{af + bd}{be + cf} & -b \frac{af + bd}{be + cf} \\ e \frac{ae - cd}{be + cf} & -d + e \frac{af + bd}{be + cf} - 2f \frac{ae - cd}{be + cf} \end{bmatrix}$$

La ecuación característica es

$$P_4(\lambda) = \frac{aef + a(bde - f(c(d - \lambda) - e\lambda)) + b(e\lambda^2 - cd(d - \lambda)) + cf\lambda(\lambda - d)}{be + cf}$$

Los valores propios son raíces de polinomios que no siempre tienen parte real negativa. Esto significa que la posición de equilibrio no es estable.

Puesto que P_4 es inestable, entonces, implica que ambas poblaciones están en cultivo con una dinámica cambiante por acción de factores externos. En el caso de estudio P_4 es (3.89; 2.56). Esto implica que aproximadamente tres *Orius* spp. por cada 15 plantas logran mantener la plaga en una densidad de equilibrio por debajo de cuatro individuos.

3.3 Sistema para la simulación de la densidad poblacional de trips

Con el fin de simular los modelos elaborados se desarrolló en R una aplicación web Shiny. El usuario debe inicialmente introducir los datos necesarios mediante una hoja de cálculo (.xlsx o .xls) con el formato que se muestra en la Tabla 7:

Para los valores de la edad de la planta se debe encabezar una columna con una “E”, para la temperatura media promedio del día anterior con una “T”, la humedad media relativa del día anterior con una “H”, las precipitaciones acumuladas del día anterior con una “P” y el promedio de los trips por hoja observado con una “O” (Observaciones). Las columnas deben tener igual cantidad de valores para un correcto procesamiento de los datos.

Tabla 7. Ejemplo para la introducción de los datos.

E	T	H	P	O
7	19.7	84.2	0	0.32
14	21.3	73.7	0	1.35
20	24.1	90.6	65.3	2.55
27	21.9	70.1	0	3.8
33	22.6	73.8	2.4	5.41
41	19.7	76.7	0	8.01
48	23	77.7	0	10.26
62	23.5	81.9	0	6.94
69	23.6	72.3	14.4	3.19
76	24.7	80.2	0	0.98

Una vez que el formato del archivo esté de forma correcta, se pasa a cargar el archivo en la aplicación Shiny (Fig. 6).

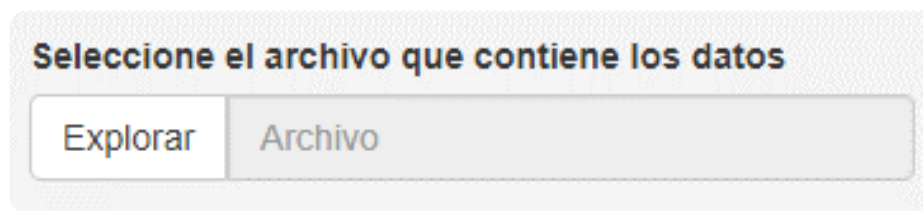


Figura 6. Sección de la aplicación para cargar el archivo con los datos

En el caso del modelo 4, presa-depredador, existe una barra lateral donde se introducen los parámetros y valores iniciales de las poblaciones (Fig. 7).

Modelo Lotka-Volterra

Presas

Depredadores

Establecer coeficientes de competencia

Tasa de crecimiento (presas)

Éxito del depredador

Tasa de competencia interespecífica (presas)

Mortalidad natural del depredador

Índice de respuesta numérica (depredador)

Figura 7. Parámetros iniciales para la estimación del modelo 4

Cuando se carga el archivo (Fig. 8) se puede navegar en el menú principal (Fig. 9) de la aplicación para observar los diferentes resultados del análisis efectuado.

Seleccione el archivo que contiene los datos

Upload complete

Figura 8. Archivo cargado en la aplicación

Tabla

Regresión

Bondad de ajuste

Ploteo

Figura 9. Menú principal

En el primer menú (Fig. 10) se muestran las tablas con la edad de la planta, el promedio de trips por hoja observado y las estimaciones predichas por cada modelo.

Tabla	Regresión	Bondad de ajuste	Ploteo
Estas tablas muestran los cambios en la población en el tiempo			
Modelo 4			
Edad	Observado	Presa	Depredador
11.00	0.00	0.36	0.92
18.00	0.60	0.67	0.72
25.00	1.50	1.33	0.64
32.00	2.50	2.63	0.70
39.00	6.00	4.90	1.03
46.00	7.90	7.21	2.12
55.00	7.60	6.28	3.59
62.00	5.90	4.22	3.54
69.00	6.20	3.33	2.89

Figura 10. Tabla con los datos observados y la estimación del modelo presa-depredador

En el menú de Regresión (Fig. 11) se muestran los resultados del análisis de regresión de los modelos correspondientes.

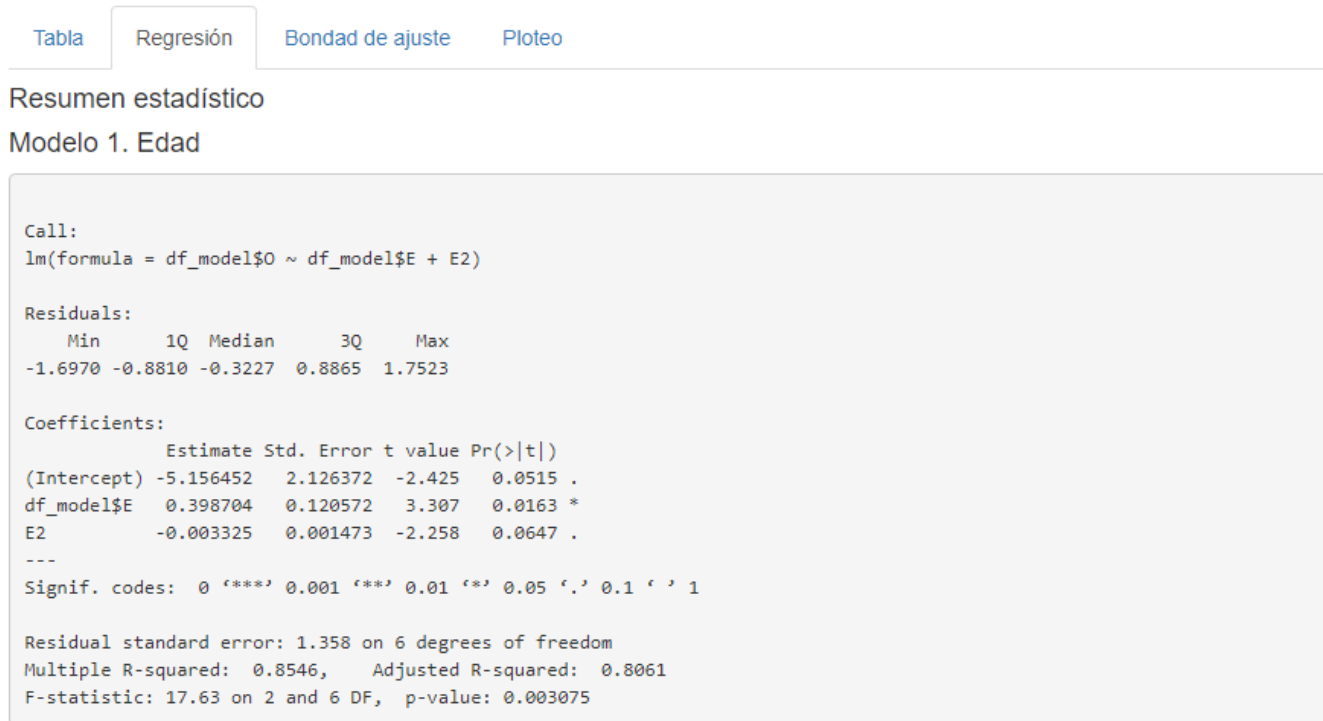


Figura 11. Análisis de regresión del Modelo 1. Edad

El tercer menú (Fig. 12) muestra los resultados del análisis para la bondad de ajuste de los modelos propuestos.



Figura 12. Bondad de ajuste de la estimación del modelo presa-depredador

Finalmente, el menú de Ploteo (Fig. 13) muestra las gráficas resultantes de los cambios de la población a través del tiempo de los tres modelos.



Figura 13. Gráfica de la estimación del modelo presa-depredador

Con el desarrollo en R de la aplicación web Shiny se satisfizo la necesidad de estimar el comportamiento de las poblaciones de trips usando modelos matemáticos.

Conclusiones

Se elaboraron tres modelos matemáticos que describen la fluctuación poblacional de tisanópteros en un ecosistema; el modelo presa-depredador con competencia de depredadores se seleccionó como el de mejor bondad de ajuste.

Se determinaron las condiciones de equilibrio del ecosistema según el estudio de estabilidad del modelo presa-depredador; se evaluaron cuatro puntos: $P_1: (0, 0)$, $P_2: (0; -\frac{d}{f})$, $P_3: (\frac{a}{c}; 0)$, $P_4: (\frac{af+bd}{be+cf}; \frac{ae-cd}{be+cf})$; de estos, P_1 , P_2 y P_4 , resultaron inestables, mientras que P_3 es estable. Se determinó así, para el caso de estudio, que aproximadamente tres depredadores por 15 plantas logran un control de la presa, aunque inestable en el tiempo.

Se desarrolló una aplicación web Shiny para el uso de los ecólogos, donde es posible estimar el comportamiento de las poblaciones de trips usando modelos matemáticos.

Recomendaciones

- Validar la bondad de ajuste de los modelos propuestos en la predicción de la densidad poblacional de otras plagas insectiles.
- Continuar con la investigación relacionada con modelos de interacción y simulación planta-plaga-agente de control biológico, estimando el valor de los parámetros biológicos y evaluando la simulación estocástica.

Bibliografía

Acosta, S., Laines, B. and Piña, G. (2014) 'Estadística Inferencial'. Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas (UPC). Available at: <http://hdl.handle.net/10757/316022>.

Alburez Viemann, J.A. (2018) *Evaluación de seis insecticidas para el control de Frankliniella occidentalis (Pergande) en melón e identificación de trips y virus presentes en pepino y melón en dos localidades de Guatemala*. Escuela Agrícola Panamericana.

Alvarado Huarca, G.F. (2019) *Efecto de tres insecticidas en la reducción poblacional de trips (Frankliniella occidentalis P.) en mango (Mangifera indica) en el valle de Casma 2017*. Universidad San Pedro.

Atakan, E. and Pehlivan, S. (2019) 'Influence of weed management on the abundance of thrips species (Thysanoptera) and the predatory bug, Orius niger (Hemiptera: Anthocoridae) in citrus mandarin', *Applied Entomology and Zoology*, 55(1), pp. 71–81. doi:10.1007/s13355-019-00655-9.

Barrio, R., Blesa, F. and Lara, M. (2005) 'VSVO Formulation of the Taylor Method for the Numerical Solution of ODEs', *Computers and Mathematics with Applications*, (50), pp. 93–111. doi:10.1016/j.camwa.2005.02.010.

Benítez García, H.B. (2019) *Modelación y simulación de la interacción planta-Meloidogyne incognita Kofoed y White (Chitwood) – Trichoderma asperellum Samuels, Lieckfeldt & Nirenberg*. Universidad Agraria de La Habana.

Brunner, P.C. and Frey, J.E. (2010) 'Habitat-specific population structure in native western flower thrips Frankliniella occidentalis (Insecta, Thysanoptera)', *Journal of Evolutionary Biology*, 23(4), pp. 797–804.

Campbell, M. (2020) *Learn RStudio IDE: Quick, Effective, and Productive Data Science*. Apress.

Campos, A.C., Bustillo, W.G. and Campos, M.S. (2004) 'Descripción del patrón espacial de Thrips palmi Karny en el cultivo de papa mediante la distribución binomial negativa', *Investigación Operacional*, 25(2), pp. 193–200.

Cano Calle, D. (2020) *Caracterización Molecular de trips (Thysanoptera: Thripidae) procedentes de cultivos comerciales de aguacate (Persea americana Mill) del oriente antioqueño y estudio de la diversidad microbiana asociada*. Universidad Nacional de Colombia.

Castillo Reyes, N. and González Muñoz, C. (2015) 'Comportamiento poblacional de insectos y ácaros fitófagos en tres variedades de tomate (Solanum lycopersicum Mill)', *Revista de Protección Vegetal*, 30, pp. 145–145.

Cermeli, M., Morales, P. and Godoy, F. (2001) 'Plagas agrícolas introducidas en Venezuela y nativas poco conocidas en los últimos años', in *XVII Congreso Venezolano de Entomología, Maturín-Monagas, Venezuela*, pp. 16–25.

Chang, W. et al. (2021) *shiny: Web Application Framework for R*. Available at: <https://cran.r-project.org/package=shiny> (Accessed: 19 May 2022).

Choloquina Cocha, L.G. and Reyes Negrete, A.O. (2020) *Desarrollo de un sistema software de aprendizaje profundo que optimice el diagnóstico de plagas en hojas de cultivos de papas en el sector La Libertad Parroquia Toacaso provincia de Cotopaxi*. Universidad de las Fuerzas Armadas.

Ciancio, A. (2008) 'Modeling nematodes regulation by bacterial endoparasites', in *Integrated management and biocontrol of vegetable and grain crops nematodes*. Springer, pp. 321–337.

Corrales Gutiérrez, P.A. (2020) *Predicción de la incidencia del cambio climático sobre el daño potencial de Phthorimaea operculella (Zeller) en el cultivo de papa (Solanum tuberosum) en Tungurahua*. Universidad Técnica de Ambato.

Cortiñas Abrahantes, J., Jiménez Jiménez, S.F. and Reyes Tornos, S. (2003) 'Modelos descriptivos y predictivos de poblaciones de Trips tabaci en el cultivo del ajo en Cuba'.

Crisanto Castro, A.J. (2018) *Manejo integrado del trips de la Mancha Roja (chaetanaphothrips signipennis) en el cultivo de banano orgánico, valle del Alto Chira, caserío Chalacalá-Sullana*. Universidad Nacional de Piura.

De Borbon, C.M., Ortego, J. and Estrada, M. de los A. (2021) *Comportamiento alimentario de Frankliniella occidentalis (Pergande) y la incidencia de TSWV (Tomato Spotted Wild Virus) en plantas de papa del cultivar Innovador*. Ediciones INTA.

Di Pietro, F.N. (2019) 'Simulación eficiente de sistemas rígidos y conmutados'. Available at: <https://ri.conicet.gov.ar/handle/11336/81094>

Elizondo Silva, A.I. (2011) 'Manejo Integrado de Plagas en Papa (Solanum tuberosum L.)'.

Elizondo Silva, A.I. et al. (2013) 'El insecticida imidacloprid y los hongos Metarhizium anisopliae, Lecanicillium lecanii para el control de Thrips palmi en el cultivo de la papa (Solanum tuberosum)', *Fitosanidad*, 17(1), pp. 31–34.

Elizondo Silva, A.I. et al. (2016) 'Comportamiento de las poblaciones de trips (Thysanoptera: Thripidae) y Nesidiocoris tenuis Reuter (Hemiptera: Miridae) en el cultivo de la papa (Solanum tuberosum L.) en Cuba', *Fitosanidad*, 20(3), pp. 137–140.

Elizondo Silva, A.I. and Murguido Morales, C.A. (2006) 'Modelos de mejor ajuste matemático a la fluctuación de las poblaciones de Thrips palmi Karny en el cultivo de la papa', *Centro Agrícola*, 33(4), p. 35.

Elizondo Silva, A.I., Murguido Morales, C.A. and Matamoros Torres, M. (2011) 'Patogenicidad de los hongos *Metarhizium anisopliae* (Metschn.), *Lecanicillium lecanii* (Zimm.) Zare & Gams y *Beauveria bassiana* (Bals.-Criv.) Vuill. sobre Thrips Palmi Karny en el cultivo de la papa (*Solanum tuberosum* L.)', *Fitosanidad*, 15(3), pp. 147–151.

Estay P., P. (2018) 'Trips de california de la cebolla'. Available at: <http://biblioteca.inia.cl/medios/biblioteca/FichasT/NR41203.pdf>.

Falcón Suárez, J.A. (2020) *Aplicación Web de apoyo para el análisis de datos agrícolas en las bases productivas*. Universidad de Matanzas.

Fonseca Riquelme, W.A. (2015) *Modelos Matemáticos en Dinámica de Poblaciones*. Universidad de Bío-Bío.

Gallego, M.A. (2015) *Modelado matemático de la Leptospirosis considerando crecimiento logístico en la población de ratones*. Universidad de la Provincia de Buenos Aires.

Gamarra, H. et al. (2020) 'El software ILCYM 4.0', *CGIAR Research Program on Climate Change, Agriculture and Food Security* [Preprint]. Available at: <https://hdl.handle.net/10568/111452>.

García Onsurbe, M. del C. (2020) *Estudio computacional de la dinámica y el control poblacional de plagas mediante el software SimKinet*. Universidad Politécnica de Cartagena.

Ginovart, M. (2015) 'What do live agent-based models offer to teaching?', *Modelling in Science Education and Learning*, 8(2). doi:10.4995/msel.2015.3486.

Gómez, H.A., Ramírez, S.S. and Polo, P.A. (2018) *Identificación, evaluación de capacidad depredadora y respuesta funcional de chinche nativa depredadora como estrategia de control biológico de trips en cultivos protegidos*. Universidad de San Carlos de Guatemala.

González, C., Fernández, M. and Castillo, N. (2016) 'Especies de tisanópteros asociadas a plantas ornamentales en el Municipio Santa Cruz del Norte. Provincia Mayabeque. Cuba.', *Métodos en Ecología y Sistemática*, 11(2), pp. 58–65.

González, C., Suris, M. and Renata-Salazar, A.P. (2012) 'Incidencia de las poblaciones de thrips sobre *Daucus carota* D. C y *Beta vulgaris* var. Cicla L. en diferentes sistemas de cultivos en Cuba', *Métodos en Ecología y Sistemática*, 7(3), pp. 24–30.

- González, M.A. and Hernández, A.D. (2018) *Asociación Gladiolo “Gladiolus grandiflorus”–Cempoalxóchitl “Tagetes erecta”*: Impacto en la población de trips “*Thrips simplex*” y mosca blanca “*Bemisia tabaci*” en el valle de Toluca. Universidad Autónoma del Estado de México. Available at: <http://ri.uaemex.mx/bitstream/handle/20.500.11799/94871>.
- González Muñoz, C. (2011) ‘Alternativas para el Manejo de Thrips palmi Karny en Cuba’, *Métodos en Ecología y Sistemática*, 6(3), pp. 89–108.
- Gopalsamy, K. (1985) ‘Global asymptotic stability in a periodic Lotka-Volterra system’, *The ANZIAM Journal*, 27(1), pp. 66–72.
- Gujarati, D.N., Porter, D.C. and Gunasekar, S. (2012) *Basic econometrics*. Tata mcgraw-hill education.
- Hearne Software (2022) *Climex Dymex Software Editions*. Available at: <https://www.hearne.software/Software/CLIMEX-DYMEX/Editions> (Accessed: 19 May 2022).
- Hothorn, T. et al. (2022) *lme4: Testing Linear Regression Models*. Available at: <https://CRAN.R-project.org/package=lme4> (Accessed: 19 May 2022).
- Ihaka, R. and Gentleman, R. (1996) ‘R: A Language for Data Analysis and Graphics’, *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 5(3), pp. 299–314. doi:10.1080/10618600.1996.10474713.
- International Potato Center (2022) *Datos y cifras de la papa*, International Potato Center. Available at: <https://cipotato.org/es/potato/potato-facts-and-figures/> (Accessed: 23 May 2022).
- León, R., Díaz, M. and Rodríguez, L. (2020) ‘Gestión de un sistema de visión artificial para la detección de los daños causados por plagas en el cultivo de palto utilizando un drone’, *Revista Ciencia y Tecnología*, 16(4), pp. 135–141. doi:10.17268/rev.cyt.2020.04.14.
- Li, D. et al. (2021) ‘Soil application of Beauveria bassiana JEF-350 granules to control melon thrips, thrips palmi Karny (Thysanoptera: Thripidae)’, *Journal of Asia-Pacific Entomology*, 24(3), pp. 636–644.
- May Cen, I. de J. (2016) ‘Modelos de Dinámica Poblacional en Ecología’, *Revista del Centro de Graduados e Investigación. Instituto Tecnológico de Mérida*, 32(60), pp. 50–55.
- Meza, K. et al. (2020) ‘Trips (Thysanoptera) asociados con la pitahaya Selenicereus undatus (Haw.) DR Hunt. especies, niveles poblacionales, daños y algunos enemigos naturales’, *La Granja. Revista de Ciencias de la Vida*, 32(2), pp. 93–105.

- Miranda, I. (2014) 'Modelación matemática de la dinámica de poblaciones: desarrollo histórico y uso práctico en Cuba', *Rev. Protección Veg.*, 29(3), pp. 157–167.
- Montoro, D. (2015) 'Capítulo 9. Regresión lineal simple', *Regresión Lineal*, p. 11.
- Nieves Hurtado, A. and Domínguez Sánchez, F.C. (2014) *Métodos numéricos aplicados a la ingeniería*. Grupo Editorial Patria.
- Ortiz Daza, C.A. (2021) *Desarrollo de una herramienta computacional basada en redes neuronales para el diagnóstico del tizón tardío en cultivos de papa*. Universidad Antonio Nariño.
- Pereira López, F.J. (2021) *Análisis comparativo de modelos matemáticos para el COVID-19 en Bogotá*. Universidad Nacional de Colombia.
- Piedra, F., Jiménez, S. and Milán, M. (1999) 'Ciclo biológico de Thrips Palmi Karny en diferentes temperaturas controladas', *Fitosanidad*, 3(3), pp. 17–20.
- Pineda Medina, D. (2019) *Simulación estocástica de la difusión de influenza aviar altamente patógena en el occidente de Cuba*. Universidad Agraria de La Habana.
- Pontius, R., Thontteh, O. and Chen, H. (2008) 'Components of information for multiple resolution comparison between maps that share a real variable', *Environmental Ecological Statistics*, 15(2), pp. 111–142. doi:10.1007/s10651-007-0043-y.
- Prieto, F. (2018) 'FuturCrop, un software que incrementa la efectividad de los tratamientos contra las plagas', *Phytoma España: La revista profesional de sanidad vegetal*, (299), pp. 66–67.
- Read Excel Files* (2022) *readxl*. Available at: <https://readxl.tidyverse.org/> (Accessed: 19 May 2022).
- Rey, L. (2020) 'Investigan plaga en plantaciones de frijol • Trabajadores', *Trabajadores*, 2 March. Available at: <https://www.trabajadores.cu/20200302/investigan-plaga-en-plantaciones-de-frijol/> (Accessed: 12 May 2022).
- Rhodes, E. and Liburd, O. (2017) 'Flower Thrips (Thysanoptera: Thripidae and Phlaeothripidae) Species Complex on Florida Blackberries and the Effect of Blackberry Cultivar', *Florida Entomologist*, 100, pp. 478–480. doi:10.1653/024.100.0212.
- Riveros Huamán, M. (2018) 'Aspectos importantes de los métodos numéricos'. Universidad Autónoma de San Francisco.

- Rodríguez, H., Ramos, M. and Surís, M. (2007) 'Los ácaros depredadores: una alternativa para el manejo de Thrips palmi Karny (Thysanoptera: Thripidae)', *Revista de Protección Vegetal*, 22(2), pp. 89–96.
- Rodríguez, J. and Ulloa, J. (2017) 'Alternativa didáctica para el estudio del modelo Gompertz', *Investigación e Innovación en Matemática Educativa*, 2, pp. 98–114.
- Rojas Carvajal, G. (2021) *Diseño de prototipo de un sistema para la identificación de plagas apoyado por cámara espectral y software de comparación de imágenes en Matlab BIODRON*. Universidad Nacional Abierta y a Distancia.
- Román, L.R. (2017) *Contribuciones para la optimización del manejo de Orius laevigatus y Anthocoris nemoralis (Hemiptera: Anthocoridae) como agentes de control biológico de plagas*. Universidad de Rioja. Available at: <http://www.banarespalacios.es/1/publicaciones/frutales/ContribucionesParaLaOptimizacionDelManejoDeOriusOr-122751.pdf>.
- Salamanca, J., Varon, E. and Santos, A.O. (2010) 'Cría y evaluación de la capacidad de depredación de Chrysoperla externa sobre Neohydatothrips signifer, trips plaga del cultivo de maracuyá', *Corp. Cien. Technol. Agropecu.*, 11, pp. 31–40. doi:10.21930/rcta.vol11_num1_art:192.
- Salas F., C. (2017) 'Plagas en hortalizas: Trips de California en lechuga'. Available at: <https://hdl.handle.net/20.500.14001/67071>.
- Sarango Cuenca, J.C. (2020) *Modelo matemático y simulación de la dinámica de crecimiento del camarón de agua*. Universidad de las Fuerzas Armadas.
- Sarkar, D. et al. (2021) *lattice: Trellis Graphics for R*. Available at: <https://CRAN.R-project.org/package=lattice> (Accessed: 19 May 2022).
- Segarra-Escandón, J. (2020) 'Métodos numéricos Runge-Kutta y Adams Bashforth-Moulton en Mathematica', *Rev. Ingeniería, Matemáticas y Ciencias de la Información*, 7(14), pp. 13–32. doi:<http://dx.doi.org/10.21017/rimci.2020.v7.n14.a81>.
- Sharov, A. (1999) *Quantitative Ecology Population*. Available at: <http://www.ento.vt.edu/~sharov/PopEcol/>.
- Shiny (2022) *Shiny from RStudio*. Available at: <https://shiny.rstudio.com/> (Accessed: 19 May 2022).
- Sievert, C. et al. (2021) *plotly: Create Interactive Web Graphics via 'plotly.js'*. Available at: <https://CRAN.R-project.org/package=plotly> (Accessed: 19 May 2022).
- Soetaert, K. et al. (2022) *deSolve: Solvers for Initial Value Problems of Differential Equations ('ODE', 'DAE', 'DDE')*. Available at: <https://CRAN.R-project.org/package=deSolve> (Accessed: 19 May 2022).

Sosa, M.R., Zamar, M.I. and Torrejon, S.E. (2017) 'Ciclo de vida y reproducción de *Caliothrips phaseoli* (Thysanoptera: Thripidae) sobre Fabaceae y Solanaceae (Plantae) en condiciones de laboratorio', *Revista de la Sociedad Entomológica Argentina*, 76, pp. 3–4.

StatPoint, Inc (2007) *STATGRAPHICS Centurion*. StatPoint, Inc. Available at: www.statgraphics.com.

Steel, R.G.D. and Torrie, J.H. (1960) 'Principles and Procedures of Statistics with Special Reference to the Biological Sciences', *McGraw Hill*, pp. 187, 287.

Toro Álava, M.P. (2017) *La Aplicación de Tecnicas Alternativas Limpias en el Control de Trips (Frankliniella tuberosi) en el cultivo de papa (Solanum tuberosum var. Super chola), en La Granja Victoria*. Universidad Técnica de Ambato.

Torres Soler, L.C. (2010) 'Métodos Numéricos'.

Wang, X.-S. et al. (2019) 'Morphology and Distribution of the Antennal Sensilla of Two Species, *Megalurothrips usitatus* and *Thrips palmi* (Thysanoptera: Thripidae)', *Insects*, 10(251). doi:10.3390/insects10080251.

Westmore, G.W., Allen, G.R. and Wilson, C.R. (2019) 'Colour preference and potato cultivar oviposition choice by onion thrips, *Thrips tabaci* (Thysanoptera: Thripidae)', *Journal of Asia-Pacific Entomology*, 22(1), pp. 25–32.

Wickham, H., Chang, W., et al. (2022) *ggplot2: Create Elegant Data Visualisations Using the Grammar of Graphics*. Available at: <https://CRAN.R-project.org/package=ggplot2> (Accessed: 19 May 2022).

Wickham, H., Bryan, J., et al. (2022) *readxl: Read Excel Files*. Available at: <https://CRAN.R-project.org/package=readxl> (Accessed: 19 May 2022).

Willmott, C. and Matsuura, K. (2006) 'On the use of dimensioned measures of error to evaluate the performance of spatial interpolators', *International Journal of Geographic Information Science*, (20), pp. 89–102. doi:10.1080/13658810500286976.

Yadav, R. and Chang, N.-T. (2014) 'Effects of temperature on the development and population growth of the melon thrips, *Thrips palmi*, on eggplant, *Solanum melongena*', *Journal of Insect Science*, 14(1), p. 78.

Zill, D.G. (2009) *A First Course in Differential Equations with Modeling Applications*. Ninth Edition. Brooks & Cole /Cengage.