
UNIVERSIDAD AGRARIA DE LA HABANA

“Fructuoso Rodríguez Pérez”

Facultad de Ciencias Técnicas



Título

**“Modelo fractal para la representación morfológica de la planta
Capsicum Annuum L. (Ají Pimiento) para su uso en
simuladores de robots agrícolas”**

Tesis pesentada en opción al título de Master en Biomatemática

Autora:

Ing. Yeniffer Aleida Veliz Díaz

Tutor:

MS.c. Reynolds León Guerra

Mayabeque, 2016

Pensamiento

“Objetos naturales muy diversos, muchos de los cuales no son familiares, tales como la tierra, el cielo y el océano, se estudian con la ayuda de una amplia familia de objetos geométricos, que hasta ahora, habían sido considerados esotéricos e inutilizables, pero que, por la simplicidad, la diversidad, y la extensión extraordinaria de sus nuevas aplicaciones, merecen ser integrados hasta en la geometría elemental. Si bien su estudio corresponde a diferentes ciencias, la geomorfología, la astronomía y la teoría de la turbulencia, entre otras, los objetos naturales en cuestión tienen en común el hecho de poseer una forma sumamente irregular o interrumpida; a fin de estudiarlos, he concebido, puesto a punto y utilizado extensamente una nueva geometría de la naturaleza” (Mandelbrot, 1997).

Agradecimientos

A Diosito porque cuando siento que estoy rendida, él está para demostrarme que puedo seguir adelante, gracias por estar siempre presente en los momentos más difíciles.

A mi abuelita por todo el amor que me dio, por ser la niña de sus ojos, por quererme, por estar pendiente de mi carrera hasta el último momento de su vida a ella que aunque no está conmigo desde el cielo me da fuerzas para seguir adelante, no hay un momento que no piense en ti, te extraño y te necesito mucho mi Llélla...

A mi abuelito que aunque hace muchos años no está conmigo estoy segura que estaría muy orgulloso de su nieta.

A mis abuelos Ana y Pastor porque sé que se sienten orgullosos de su nieta.

A mis padres porque sin ellos no lo hubiese podido lograr, por estar siempre en las buenas y en las malas, por luchar conmigo hacer realidad mis sueños primero en mi carrera y ahora en mi Maestría, por seguir ayudándome aun cuando ya su niña creció.

A mi hermanita "moñi" por demostrarme que siempre puedo contar con ella, Gracias moñi te quiero mucho.

A mi vecina, peluquera y amiga Yeny por demostrarnos que siempre podemos contar con ella.

A mi tutor Reynolds por seguir adelante conmigo aún después de graduada, por estos años que llevo de conocerlo, como tutor, como colega; por haberme permitido siempre poder contar con su apoyo y sobre todo gracias por su amistad.

A mi amigo Alfre que aunque a veces me pelea le doy muchas gracias por ayudarme durante toda la carrera y en mi vida como profesional y sobre todo por su amistad, por escucharme y darme siempre un buen consejo. Alfre siempre puedes contar conmigo...

A mis compañeros de la maestría, por estos dos años juntos de sacrificios pero también de buenos momentos.

Agradecimientos

A mis compañeros del departamento por preguntar siempre y estar pendiente.

A mis amigos y amigas del trabajo, de la vida y de las fiestas, Leysi, Mili, Amaury y Javier por en algún momento de este tiempo de compartir juntos; escucharme, darme un buen consejo, darme ánimos y ser mis amigos.

A mis amigas de siempre Yaniela, Yanela, Anel, Merian y Jeylin.

A Humbe por su ayuda incondicional.

A todos los profe que durante estos dos años ayudaron a que este día fuera posible y especialmente a la profe Lucy y Mercedes por su entrega y confianza en nosotros.

A todos. Muchas Gracias...

Dedicatoria

*A Diosito y la virgencita: Por ser mi fuerza y darme la fe para continuar y
por estar siempre presente en los momentos más difíciles.*

*A mi Llella: Porque sé que si estuviera conmigo viviría este momento como
el más feliz de su vida.*

*A mis padres: Por su amor, sacrificio, por su dedicación, comprensión, por
ser el regalo más bello que la vida me dio.*

*A mi hermana: Porque sé que para ella este triunfo es tan importante como
lo es para mí.*

En fin a todos los que hicieron posible que este sueño se hiciera realidad.

Resumen

La presente investigación surge en el marco del proyecto de Robótica Agrícola que se desarrolla en la Universidad Agraria de La Habana, tuvo como objetivo diseñar un modelo que permitiera la representación tridimensional de la planta *Capsicum Annuum* L. mediante la teoría de la geometría fractal para su uso en simuladores de robots agrícolas. Se analizaron características morfológicas de la planta *Capsicum Annuum* L., se realizó un análisis fractal de la planta mediante el método Conteo de Cajas efectuando un ajuste lineal por el método de Mínimos Cuadrados, demostrando la presencia de una relación lineal que permitió clasificar la planta de *Capsicum Annuum* L. como un fractal, sobre esta información se diseñó el modelo que describe el crecimiento de la misma mediante un Sistema-L con características fractales, se construyó a partir del modelo el algoritmo que describe el Sistema-L *Capsicum Annuum* L. en lenguaje natural. Para validar el modelo se utilizó la herramienta Lparser, permitiendo interpretar la estructura del modelo de Sistema-L de la planta, simular el crecimiento de la misma en diferentes etapas y visualizarlo mediante el visor 3D Web, Cortono3D Viewer 6.0. Se observa que la tendencia al futuro será desarrollar más este tipo de modelos, incluyendo variaciones debido al ambiente y manejo, de manera que apoyen la toma de decisiones.

Palabras claves: modelación tridimensional, *Capsicum Annuum* L., geometría fractal, Conteo de Cajas, Sistema-L.

Abstrac

This research began in the framework of the Agricultural Robotics develops in the Agrarian University of Havana, aimed to design a model that would allow the three-dimensional representation of the plant *Capsicum Annuum* L. by the theory of fractal geometry for simulators use in agricultural robots. morphological characteristics of the plant *Capsicum Annuum* L. analyzed, a fractal plant analysis was performed by counting method boxes performing a linear fit by the least squares method, demonstrating the presence of a linear relationship which allowed the classification plant *Capsicum Annuum* L. as a fractal, this information model describing the growth of the same through a systems-L with fractal characteristics was designed, built from the algorithm model that describes the system-L *Capsicum Annuum* L. in natural language. To validate the model the Lparser tool was used, allowing to interpret the structure of L-System model of the plant, simulating the growth of the same in different stages through the viewfinder and display 3D Web, Cortono3D Viewer 6.0. It is noted that the future trend will develop this type of models, including variations due to the environment and management, so that support decision-making.

Keywords: three-dimensional modeling, *Capsicum Annuum* L., fractal geometry, Count Boxes, Systems-L.

Glosario de términos

GLOSARIO DE TÉRMINOS

Filotaxis: se denomina filotaxis a la disposición que presentan las hojas en el tallo. La disposición que presentan es característica de cada especie y tiene la función de que las hojas estén expuestas al sol con el mínimo de interferencias posibles por parte de sus compañeras. Las hojas se denominan:

- **Opuestas:** si se encuentran situadas una en frente de otra en el mismo nivel del tallo
- **Decusadas:** si cada verticilo con respecto al anterior está girado 90°.
- **Esparcidas:** cuando se disponen, de una en una, siguiendo una hélice.
- **Alternas:** cuando se disponen, de una en una, formando un solo plano.
- **Verticiladas:** cuando de un verticilo o de un mismo punto salen las hojas.
- **Fasciculadas:** es una disposición similar a la del verticilo, en la que las hojas salen en forma de ramo pero de puntos distintos (aunque muy cercanos entre sí).
- **En roseta:** si presentan una disposición en espiral muy apretada alrededor del tallo, pudiendo ser basales o dispuestas al final del tallo.
- **Basales:** si parten de un mismo punto en la base. El tallo no es visible o está muy reducido.

Organogénesis: evento morfogénico que se caracteriza por su desarrollo unipolar. Es la formación de un primordio unipolar a partir de una yema con el subsecuente desarrollo de este en un brote vegetativo, existiendo siempre una conexión entre los nuevos brotes y el tejido paterno. Estos brotes vegetativos son posteriormente puestos a enraizar en otra etapa, vía formación de primordios de raíces y el subsecuente enraizamiento final.

Fotosíntesis: proceso químico que tiene lugar en las plantas con clorofila y que permite, gracias a la energía de la luz, transformar un sustrato inorgánico en materia orgánica rica en energía.

Yema: en botánica, la yema es un órgano complejo de las plantas que se forma habitualmente en la axila de las hojas formado por un meristemo apical, (células con capacidad de división), a modo de botón escamoso (catáfilos) que darán lugar a hojas (*foliíferas*) y flores (*floríferas*).

Glosario de términos

Yema axilar: cuando está ubicada en la axila de una hoja (también denominadas laterales).

Yema apical: cuando está ubicada en la punta de una ramilla.

Ápice: en botánica o zoología, **ápice** designa el extremo superior o punta (del latín *apex*, con el mismo significado) de la hoja, del fruto, del pólipo.

Pecíolo: el **pecíolo** o **peciolo** (del latín *petiolus*, forma diminutiva de *pes pedis*, pie, tronco de una planta) es el rabillo que une la lámina de una hoja a su base foliar o al tallo.

Sépalos: en botánica se denomina **sépalo** a la pieza floral que forma el cáliz de una flor de una planta angiosperma. Los sépalos son los que envuelven a las otras piezas florales en las primeras fases de desarrollo, cuando la flor es sólo un capullo o pimpollo.

Corola: conjunto de pétalos que forman la flor y protegen sus órganos de reproducción, los colores llamativos de la corola atraen a los insectos.

Cáliz: en botánica, el cáliz es el verticilo externo en las flores con perianto heteroclamídeo, es decir, con dos clases de piezas. Se compone de sépalos, que son antófilos estériles, generalmente verdes y de consistencia herbácea. Tiene función protectora.

Raíz pivotante: raíz formada por un eje preponderante del cual arrancan las raíces de segundo orden. "las plantas dicotiledóneas presentan raíces pivotantes"

Sistema radicular: En botánica, se denomina sistema radical o sistema radicular al conjunto de raíces de una misma planta. Según su origen y desarrollo se distinguen dos tipos de sistemas radiculares, los cuales están asociados a grupos diferentes de plantas.

Índice

INTRODUCCIÓN.....	1
CAPÍTULO 1: REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA	4
1.1 Introducción	4
1.2 Botánica del Pimiento (Capsicum Annuum L.)	4
1.2.1 Taxonomía.....	4
1.2.2 Morfología.....	5
1.2.3 Fisiología	6
1.2.3.1 Etapas fenológicas y desarrollo	6
1.3 Modelización.....	9
1.3.1 Modelo matemático.....	10
1.3.2 Modelación matemática.....	10
1.4 Modelación estructural de plantas.....	11
1.5 Geometría de fractales	11
1.5.1 Concepción de la geometría fractal	12
1.5.2 Dimensión topológica de un objeto geométrico	14
1.5.3 Dimensión fractal o dimensión de Hausdorff	15
1.5.4 Métodos para determinar la dimensión fractal de un objeto	17
1.5.4.1 Método Conteo de Cajas.....	17
1.5.4.2 Divisores (Método del compás)	18
1.5.4.3 Relación Área - Perímetro	19
1.5.4.4 Análisis de imágenes y textura	20
1.5.5 Definición matemática de fractales	20
1.5.6 Tipos de fractales.....	20
1.5.7 Características de los fractales	21
1.5.7.1 Autosimilitud.....	21
1.5.8 La geometría fractal en la modelación estructural de plantas.....	22
1.6 Autómata celular, re-escritura y Sistemas de Lindenmayer.....	23
1.7 Sistemas de Lindenmayer	24
1.7.1 Elementos de un Sistema-L.....	25
CAPÍTULO 2: MATERIALES Y MÉTODOS	28
2.1 Introducción	28

Índice

2.2 Métodos de Investigación	28
2.3 Tecnologías Informáticas utilizadas en la investigación.....	29
2.3.1. MATLAB	29
2.3.2 Software estadístico: Statgraphics-Plus 5.1.....	29
2.3.3 Lparser.....	30
2.3.4 Cortona3D Viewer 6.0.....	32
2.4 Características botánicas del Capsicum Annuum L. que se tienen en cuenta en el modelo.	33
2.5 Análisis fractal del Capsicum Annuum L.	36
2.5.1 Aplicación del Método Conteo de Cajas para el análisis fractal de la planta Capsicum Annuum L.....	36
2.6 Proceso que se sigue para generar el modelo de Sistema-L de la planta Capsicum Annuum L.	39
2.7 Parámetros que se tienen en cuenta para el modelo.....	40
2.8 Modelo que genera el crecimiento de la planta Capsicum Annuum L.	42
CAPÍTULO 3: RESULTADOS Y DISCUSIÓN.....	45
3.1 Introducción	45
3.2 Descripción del modelo que genera el crecimiento de la planta Capsicum Annuum L.	45
3.3 Algoritmo del Sistema-L que genera la planta Capsicum Annuum L.	53
CONCLUSIONES.....	54
RECOMENDACIONES	55
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	56
ANEXOS.....	60

Índice de Figuras

Figura 1. Planta de Pimiento (<i>Capsicum Annuum</i> L.). Fuente: Elaboración propia.	6
Figura 2. Ciclo de cultivo del <i>Capsicum Annuum</i> L. Fuente: Elaboración propia.	8
Figura 3. Diagrama para la construcción de un modelo representativo de un sistema biológico real. Fuente: (Lahoz, 2004).	9
Figura 4. Concepto de dimensión. Fuente: Ortega (2013).	16
Figura 5. Ejemplos de escalamiento. Fuente: Ortega (2013).	16
Figura 6. Fichero en formato ASCII con la estructura del Lparser. Fuente: (Lahoz, 2004).	30
Figura 7. Alfabeto del Lparser. Fuente: (Lahoz, 2004).	31
Figura 8. Percepción del eje de las hojas y del orden de un eje.	34
Figura 9. Sistema de Ramificación del <i>Capsicum Annuum</i> L. Fuente: (Rosas et al., 2014).	35
Figura 10. Planta de <i>Capsicum Annuum</i> L. con 38 días de edad que muestra una distribución alterna en sus hojas. Fuente: Elaboración propia.	35
Figura 11. Función en Matlab programada para simular la malla sobre la imagen. Fuente: Elaboración propia.	37
Figura 12. Método Conteo de Cajas aplicado para calcular la dimensión fractal de la planta <i>Capsicum Annuum</i> L. Fuente: Elaboración propia.	38
Figura 13. Cálculo de la dimensión fractal de la planta <i>Capsicum Annuum</i> L. Fuente: Elaboración propia.	39
Figura 14. Fichero en formato ASCII con la estructura del Sistema-L.	49
Figura 15. Resultado de parsear el fichero en formato ASCII con la estructura del Sistema-L en el Lparser.	49
Figura 16: Simulación de la planta obtenida de parsear el fichero con la estructura del Sistema-L en el Lparser con 5 iteraciones.	50
Figura 17: Simulación de la planta obtenida de parsear el fichero con la estructura del Sistema-L en el Lparser con 8 iteraciones.	51
Figura 18: Simulación de la planta obtenida de parsear el fichero con la estructura del Sistema-L en el Lparser con 10 iteraciones.	52
Figura 19a. Conjunto de Mandelbrot. Ejemplo de fractal en tiempo de escape infinito.	60
Figura 19b. Conjunto de Julia. Ejemplo de fractal en tiempo de escape infinito. Fuente: (Vivas et al., 2005).	60
Figura 20. Fractal de Newton. Ejemplo de fractal en tiempo de escape finito. Fuente: (Vivas et al., 2005).	60

Índice de Figuras

Figura 21. Fractal autosemejante generado por un IFS. Fuente: (Vivas et al., 2005).	61
Figura 22. Fractales de bifurcación. Ecuación logística	61
Figura 23. Atractor de un sistema dinámico. Fuente: (Vivas et al., 2005).	61
Figura 24. Conjunto de Cantor en 3 iteraciones.	61
Figura 25. Autosimilitud exacta del copo de nieve de Koch.	62
Figura 26. Las primeras tres iteraciones de la curva de Koch.....	62

Introducción

INTRODUCCIÓN

Uno de los usos que tradicionalmente se ha dado a la matemática, es el de proveer modelos que caractericen los fenómenos, principalmente del mundo físico (...) diversos campos de la computación gráfica y su constante avance ha llevado a la búsqueda de modelos matemáticos que describan la realidad, consolidando estructuras que se pueden representar en un computador y que explicarán algunos de los fenómenos que se dan en la naturaleza, como por ejemplo (...) la representación realista de plantas y sus partes (...) (Vivas et al., 2005).

La modelación, en general, en los últimos años ha sufrido un vuelco, debido a la existencia de herramientas de mayor capacidad para modelar sistemas complejos. Estas herramientas van desde un sustento teórico más amplio, mejores algoritmos matemáticos para modelación y mayor capacidad de procesamiento de información debido a los avances de la informática. La biología, botánica y otras ciencias afines no han estado ajenas a esto, uniéndose a la tendencia mundial de manejar modelos más complejos que permitan experimentar en “laboratorios virtuales” el desarrollo de los fenómenos en estudio (Fernández, 2005).

Específicamente, en la modelación del crecimiento y desarrollo de plantas existen hoy dos corrientes básicas: por un lado, en la última década ha existido un fuerte avance en la modelación estructural de plantas, entendiéndose por modelación estructural la determinación y modelación de las leyes fundamentales que comandan la formación de la estructura de una planta, su filotaxis, organogénesis, reacciones estructurales ante el ambiente, entre otros. Por otra parte, ha habido grandes avances en los modelos fisiológicos de plantas (modelos de fotosíntesis, respiración, movimiento del agua al interior de la planta, fijación de carbono, entre otros). Dado que estos dos aspectos por sí solos no explican totalmente el funcionamiento de una planta, la unión de ambos tipos de modelos ha dado origen a los modelos funcionales-estructurales de plantas (*functional-structural plant models*) (Fernández, 2005).

Introducción

Se revisa literatura proveniente especialmente de los principales grupos dedicados a estos desarrollos; como son el grupo de investigadores perteneciente al Laboratorio de Modelación de Plantas AMAP, unidad mixta de investigación entre el CIRAD (Centro Internacional de Investigación Agrícola para el Desarrollo) y el INRA (Instituto Nacional de Investigación Agrícola), en Francia. Este grupo ha desarrollado principalmente la teoría de análisis arquitectural de plantas y la modelación estocástica de su estructura en tres dimensiones. Por otra parte, está el grupo de trabajo del METLA (Instituto Forestal de Finlandia), quienes han trabajado en la elaboración de modelos funcionales-estructurales, liderados por el Dr. Risto Sievänen. Por último, existe un grupo en la Universidad de Calgary, liderado por el Dr. Przemyslaw Prusinkiewicz, quienes han completado los alcances del Lenguaje L (de *Lindenmayer*) de modelación de plantas en tres dimensiones, creando un laboratorio virtual de plantas.

Los modelos funcionales estructurales de plantas tienen en común que integran los procesos fisiológicos involucrados en la formación de una planta con los resultados topológicos o morfológicos, lo que según los intereses del proyecto de Robótica Agrícola que se lleva a cabo en la Universidad Agraria de la Habana y dentro del cual esta investigación constituye una sublínea, no se ajusta a sus objetivos, por lo que resulta importante obtener un modelo que describa el crecimiento de la planta *Capsicum Annuum* L. desde su visión morfológica para ser utilizado en los simuladores de robots agrícolas, para ello se analiza el estado del arte en la modelación del crecimiento de plantas, centrando la atención específicamente en una de las corrientes básicas que existen actualmente en este campo: la modelación estructural de plantas.

A partir de los elementos antes expuestos se declara como **Problema científico**: ¿Cómo modelar en 3D la planta *Capsicum Annuum* L. para su uso en simuladores de robots agrícolas?

Objeto de estudio: La modelación tridimensional de plantas.

Campo de acción: La geometría fractal aplicada a la modelación tridimensional de plantas.

Introducción

Objetivo general: Diseñar un modelo que permita la representación tridimensional de la planta *Capsicum Annuum* L.

Objetivos específicos:

- Analizar los referentes teóricos sobre modelación de plantas y la teoría de la geometría fractal.
- Desarrollar un modelo matemático basado en la teoría de la geometría fractal que describa el crecimiento de la planta *Capsicum Annuum* L.
- Diseñar el algoritmo que responda al modelo descrito.
- Validar el modelo.

Hipótesis: Mediante la teoría de la geometría fractal se puede modelar el crecimiento de la planta *Capsicum Annuum* L. en sus diferentes estadios para ser utilizada en los simuladores de robots agrícolas.

Novedad científica: Se introduce la teoría de la geometría fractal aplicada a la modelación de plantas *Capsicum Annuum* L. para su uso en simuladores de robots agrícolas.

Aporte práctico: Un modelo que permite simular el crecimiento de la planta *Capsicum Annuum* L. mediante geometría fractal y Sistemas-L para su uso en simuladores de robots agrícolas.

Revisión bibliográfica

CAPÍTULO 1: REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

1.1 Introducción

En el presente capítulo se hace un análisis exhaustivo respecto a los referentes teóricos y tecnologías actuales existentes sobre la modelación tridimensional de plantas, se profundiza en características botánicas de la planta de pimiento (*Capsicum Annuum* L.), objetivo de estudio en la presente investigación para su posterior modelación, así como, las principales corrientes en las que se desarrolla la modelación de plantas a nivel mundial, centrando la atención en la teoría de la geometría fractal y los Sistemas-L o Sistema de Lindenmayer.

1.2 Botánica del Pimiento (*Capsicum Annuum* L.)

1.2.1 Taxonomía

El pimiento pertenece al género *Capsicum*, de la familia de las Solanáceas (Tabla 1). Las variedades cultivadas de la especie *Capsicum Annuum* L. pertenecen a varias subespecies o variedades botánicas, existen algunas de ellas con sabor picante (Morales, 2013).

El género *Capsicum* (Solanaceae) representa uno de los cultivos hortícolas más importantes en el mundo; incluye alrededor de 30 especies de las cuales *Capsicum Annuum* L. es una de las especies más cultivadas y por lo tanto de mayor importancia económica (Nieto et al., 2007).

Tabla 1. Clasificación taxonómica del pimiento (*Capsicum Annuum* L.) (Orellana et al., 2000).

Nombre científico	<i>Capsicum Annuum</i> L.
División	<i>Embriophyta</i>
	<i>Asiphonograma</i>
Subdivisión	Angiospermas
Clase	Dicotiledóneas
Orden	Polemoniales
Familia	Solanácea
Género	<i>Capsicum</i>
Especie	<i>Annuum</i>

Revisión bibliográfica

1.2.2 Morfología

Según Molina (2012), el *Capsicum Annuum* L. es una planta herbácea perenne, con ciclo de cultivo anual de porte variable entre los 0,5 metros (en determinadas variedades de cultivo al aire libre) y más de 2 metros (gran parte de los híbridos cultivados en invernadero).

Sistema radicular: pivotante y profundo (dependiendo de la profundidad y textura del suelo), con numerosas raíces adventicias que horizontalmente pueden alcanzar una longitud comprendida entre 50 centímetros y 1 metro (Maroto, 2000).

Tallo principal: es bastante leñoso, cuando la planta tiene de 8 a 10 hojas, el tallo comienza a ramificarse, algunas variedades ramifican más que otras, según las condiciones ambientales y de acuerdo a las características de cada variedad. Las plantas pueden alcanzar una altura desde 40-150 cm (Depestre, 2009).

Hojas: son glabras, enteras, ovales o lanceoladas con un ápice pronunciado, peciolo largo y muy aparente. La inserción de las hojas en el tallo tiene lugar de forma alterna y su tamaño es variable en función de la variedad, existiendo cierta correlación entre el tamaño de la hoja adulta y el peso medio del fruto (Orellana et al., 2000).

Flor: Las flores aparecen solitarias en cada nudo del tallo, con inserción en las axilas de las hojas. Son pequeñas y constan de una corola blanca. El cáliz está provisto de 5 sépalos verdes soldados entre sí; la corola es enredada con 5 pétalos soldados de color blanco, raramente de color violeta pálida. La floración en el pimiento solo se produce cuando la planta posee un grado de madurez, que no se consigue hasta que tiene diez hojas (Aldana, 2001).

Fruto: La formación del fruto se produce en cada nudo y división del tallo. Los frutos son bayas semicartilaginosas, deprimidas y de color variable. Cuando están maduros tienen formas y tamaños muy variables (Araujo et al., 2014).



Figura 1. Planta de Pimiento (*Capsicum Annuum* L.). Fuente: Elaboración propia.

1.2.3 Fisiología

1.2.3.1 Etapas fenológicas y desarrollo

Para describir el crecimiento y desarrollo de los cultivos, es necesario determinar las funciones o tasas de diferentes procesos; éstos incluyen la identificación de fases y etapas distintivas del desarrollo, así como la predicción de la duración de éstas (...) (Soto, 2008).

Según (Nuez et al., 1996) dentro de las etapas fenológicas del desarrollo del género *Capsicum* se encuentran:

a) Germinación y emergencia

El período de preemergencia varía entre 8 a 12 días, y es más rápido cuando la temperatura es mayor, durante el período entre la germinación y la emergencia de la semilla emerge primeramente una raíz pivotante y las hojas cotiledonales, luego el crecimiento de la parte aérea procede muy lentamente, mientras que se desarrolla la raíz pivotante. Casi cualquier daño que ocurra durante este período tiene consecuencias letales y es la etapa en la que se presenta la mortalidad máxima.

Revisión bibliográfica

b) Crecimiento de la plántula

Luego del desarrollo de las hojas cotiledonales, inicia el crecimiento de las hojas verdaderas, que son alternas y más pequeñas que las hojas de una planta adulta. De aquí en adelante, se detecta un crecimiento lento de la parte aérea, mientras la planta sigue desarrollando el sistema radicular, es decir, alargando y profundizando la raíz pivotante y empezando a producir algunas raíces secundarias laterales. La tolerancia de la planta a los daños empieza a aumentarse, pero todavía se considera que es muy susceptible.

c) Crecimiento vegetativo rápido

A partir de la producción de la sexta a la octava hoja, la tasa de crecimiento del sistema radicular se reduce gradualmente; en cambio la del follaje y de los tallos se incrementa, las hojas alcanzan el máximo tamaño, el tallo principal se bifurca (9-12 hojas), después que el brote ha terminado por una flor o vástago floral (botón floral). A medida que la planta crece, ambas ramas se subramifican, después que el crecimiento del brote ha producido un número específico de órganos florales, vuelve a iniciarse una continuación vegetativa del proceso. Este ciclo se repite a lo largo del período de crecimiento. Se trata de un crecimiento simpodial. En este período la planta puede tolerar niveles moderados de defoliación. La tolerancia se incrementa a medida que la planta crece y siempre que no haya otros factores limitantes, la pérdida del follaje se compensa rápidamente.

d) Floración y fructificación

Al iniciar la etapa de floración, el ají produce abundantes flores terminales en la mayoría de las ramas, aunque debido al tipo de ramificación de la planta, parece que fueran producidas en pares en las axilas de las hojas superiores. Cuando los primeros frutos empiezan a madurar, se inicia una nueva fase de crecimiento vegetativo y de producción de flores. De esta manera, el cultivo de ají tiene ciclos de producción de frutos que se traslapan con los siguientes ciclos de floración y crecimiento vegetativo. Este patrón de fructificación da origen a frutos con distintos grados de madurez en las plantas, lo que usualmente permite cosechas semanales o bisemanales durante un período que oscila entre 6 y 15 semanas, dependiendo del manejo que se dé al cultivo.

Revisión bibliográfica

El mayor número de frutos y los frutos de mayor tamaño se producen durante el primer ciclo de fructificación, aproximadamente entre los 90 y 100 días. Los ciclos posteriores tienden a producir progresivamente menos frutos o frutos de menor tamaño, como resultado del deterioro y agotamiento de la planta.

Generalmente la fenología de la planta se resume en: germinación y emergencia, crecimiento de la plántula, crecimiento vegetativo rápido, floración y fructificación (Orellana Benavides et al., 2000).

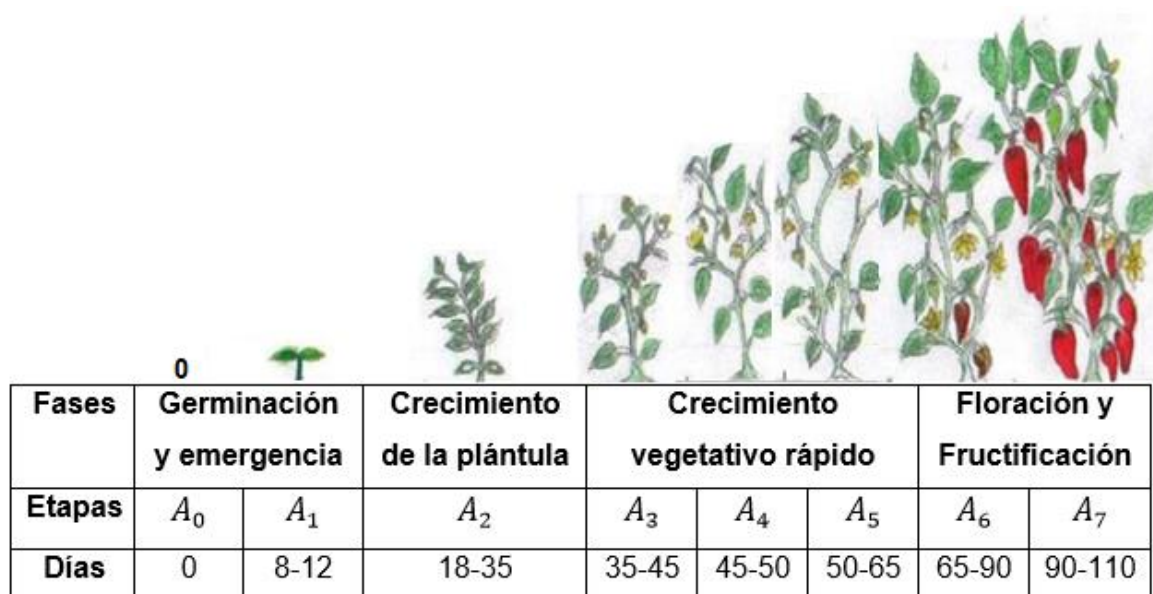


Figura 2. Ciclo de cultivo del Capsicum Annuum L. Fuente: Elaboración propia.

Las plantas de pimiento tienen crecimiento simpódico es decir cuando el tallo principal deja de crecer y continua el crecimiento en las ramas laterales, repitiéndose el proceso y en cada bifurcación se producen flores, generalmente solitarias. Si la planta se deja crecer libremente, las primeras 6 a 12 flores amarran fruto, pero la demanda de nutrientes para su rápido crecimiento, ocasiona aborción de un amplio porcentaje de flores generadas subsecuentemente. Una vez que estos frutos finalizan su crecimiento y son cosechados, continúa el crecimiento vegetativo y eventualmente, el amarre y el desarrollo de 4 a 8 frutos más, que a su vez, ocasionaran el aborto de flores que se forman posteriormente. Entre la cosecha del primer y el segundo flujo de frutos puede haber un intervalo de dos meses lo que causa que en un ciclo de cultivo completo trascurren entre ocho y diez meses después del trasplante (Reséndiz et al., 2010).

1.3 Modelización

Según (Goñi y García, 2006) un modelo es una abstracción o representación formal de un sistema o de un proceso. Por tanto, un modelo representa algún aspecto particular de la realidad convirtiéndose en un referente de la misma, que permite a los usuarios comprender e interactuar con la realidad, aunque de una forma simplificada y exenta de la complejidad y riesgos potenciales del mundo real. La utilidad de un modelo deriva del propósito o finalidad para el cual fue formulado. Por ejemplo, hay modelos cuya finalidad no es otra que explicar o describir el significado de un sistema o proceso teniendo por tanto un propósito meramente cognitivo. Por el contrario, en ocasiones el modelo es formulado con el objetivo de encontrar la solución óptima de un determinado problema. Finalmente, en otros casos un modelo encuentra su utilidad a la hora de establecer una predicción o pronóstico del estado futuro de un sistema.

En el caso particular de la Biología, un modelo es más valorado cuando además de proporcionar una explicación de la estructura u organización de un sistema, permite la posibilidad de establecer predicciones (aunque éstas sean cualitativas) que más tarde puedan ser contrastadas de modo experimental u observacional (Lahoz, 2004).

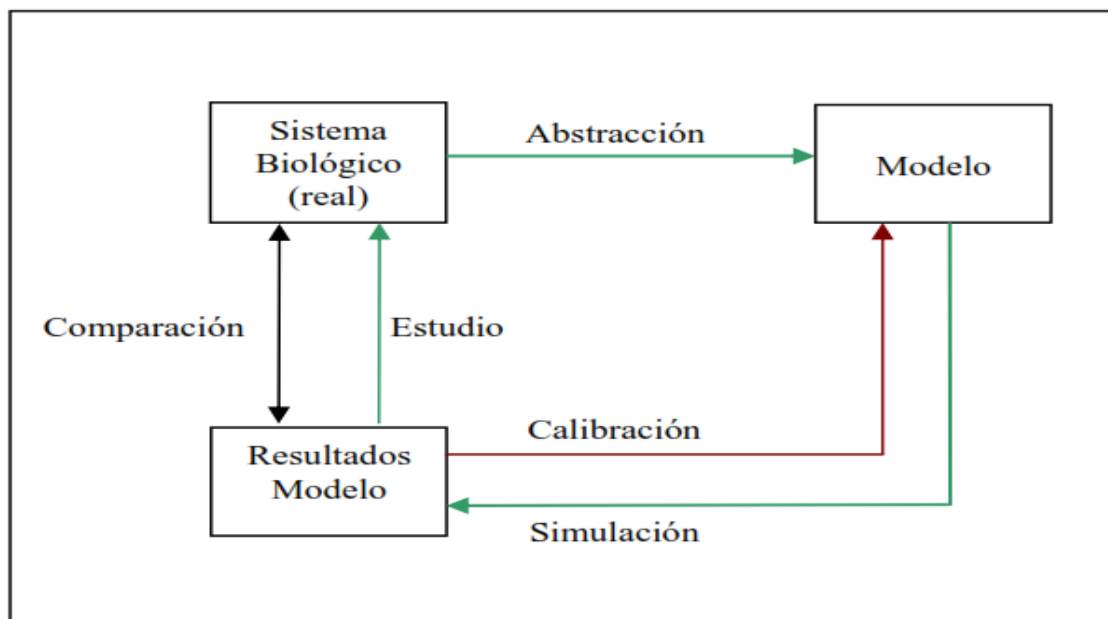


Figura 3. Diagrama para la construcción de un modelo representativo de un sistema biológico real. Fuente: (Lahoz, 2004).

Revisión bibliográfica

En la figura se pueden identificar las fases que se siguen en la elaboración de un modelo. La primera es realizar un estudio profundo del sistema. Mediante este estudio se seleccionan las variables más importantes, las relaciones e incluso los comportamientos esperados. A continuación se realiza el modelo (lo cual implica un importante ejercicio de abstracción y traducción), para finalmente realizar simulaciones sobre dicho modelo. Si los resultados no son satisfactorios (normalmente porque no se corresponden con los reales o los esperados), es fundamental volver a analizar el sistema biológico real y plantearse si faltan por añadir elementos y/o relaciones que puedan ser relevantes. Loc. Cit.

1.3.1 Modelo matemático

Según (Hein y Bienmbengut, 2006) un modelo matemático se definen como: “un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que traducen, de alguna forma, el fenómeno en cuestión. El modelo permite no sólo obtener una solución particular sino también servir de soporte para otras aplicaciones o teorías.”

Por su parte Barbosa (2009), advierte de la multiplicidad de sentidos que se le da a la palabra modelo, el cual define como: un modelo en un sentido amplio es aquel que denota una representación simplificada, mental o no que los seres humanos hacen sobre la realidad (o supuesta realidad). Llamemos a modelar el proceso de producción de un modelo.

1.3.2 Modelación matemática

(Bassanezi y Biembengut, 1997) plantean que la mayoría de los autores cuando se refieren a la modelación matemática lo hacen como el proceso que utiliza conceptos y técnicas, esencialmente matemáticas, para el análisis de situaciones reales.

Según Zapata (2014), se muestra que el concepto de modelo está íntimamente relacionado con la modelación matemática, debido a que justamente de lo que se trata es de buscar un modelo que interprete, describa o solucione un fenómeno o problema de la realidad (...) La modelación matemática entonces, permite elaborar modelos que posibilitan una mejor comprensión, simulación y explicación del fenómeno que se estudia.

Revisión bibliográfica

La autora de la investigación coincide con los criterios de los autores ya que se centran en mostrar el modelo matemático como una forma de estudiar, por medio de relaciones matemáticas, la formalización de un fenómeno asociado a la realidad, lo cual se corresponde con los objetivos de la presente investigación.

1.4 Modelación estructural de plantas

La modelación estructural de plantas ha sido desarrollada a través de tres corrientes diferentes: por una parte, existen variados modelos alométricos, que buscan explicar la forma general del tronco y de la copa de los árboles, asemejándolos a formas geométricas generales, tales como conos truncados, esferoides, entre otros. La simplicidad de este tipo de modelos, sin embargo, no permite explicar muchos fenómenos en el desarrollo de plantas. Estas limitantes generaron la necesidad de crear modelos en que la unidad fundamental a modelar ya no fuese la planta completa, o la aproximación geométrica a la forma de la copa, sino que estructuras más pequeñas dentro de la planta. Dentro de este tipo de modelación, se destacan las dos corrientes restantes: la modelación de arquitectura de plantas y los lenguajes orientados a la modelación tridimensional de plantas, como los Sistemas-L (o lenguaje de Lindenmayer) (Fernández, 2005).

Es importante antes de continuar abordando el tema relacionado con este tipo de modelación centrar la atención en otra forma de modelar estructuras complejas de la naturaleza, como son las plantas: se hace referencia a la Teoría de fractales.

1.5 Geometría de fractales

La geometría euclidiana, la trigonometría y el cálculo son las herramientas que generalmente se usan para modelar los fenómenos naturales. Los modelos son descritos en términos de puntos, líneas rectas, círculos, parábolas y otras curvas simples. Así, los puntos de dimensión cero, las líneas y curvas unidimensionales, las figuras planas bidimensionales como el cuadrado y el círculo, y los cuerpos tridimensionales como los cubos y las esferas nos hacen ver al mundo como hasta ahora lo entendemos. Sin embargo, algunos fenómenos naturales son descritos mejor por una dimensión cuyo valor no es precisamente entero, en

Revisión bibliográfica

otras palabras, no corresponde a una dimensión euclidiana. Ese valor, entonces, corresponde a una dimensión fractal (Valdes y Olivares, 1998).

Desde que se formó nuestro planeta han existido, en la naturaleza, una gran diversidad de formas complejas y caóticas: el ramaje de un arbusto, la superficie rugosa de una roca, el contorno de una nube o el perfil de una montaña, que no podían ser descritas desde el punto de vista de la geometría, la amplificación de una parte de estos cuerpos proporcionaba otra estructura compleja que, aparentemente, no guardaba ningún orden. A este tipo de formas se les consideró, durante mucho tiempo, como “monstruosidades geométricas” que no se disponían a ser estudiadas de forma sistemática (Moreles, 2003).

A este tipo de formas geométricas que, entre otras propiedades, contienen una imagen de sí mismas en cada una de sus partes, se les llama fractales, y hace ya más de una década que ingresaron al mundo científico con un conjunto de nuevas reglas para enfrentarse con el reto de conocer y describir la naturaleza mediante el uso de mecanismos matemáticos (Torres y Loraza, 2008).

Mandelbrot desarrolló esta nueva geometría que permite el estudio de las formas naturales, identificando una familia de formas demasiado irregulares para ser descritas mediante la geometría euclidiana a las que llamó fractales (...) La geometría euclidiana describe por medio de fórmulas, asigna dimensiones enteras a los objetos y es adecuada para describir objetos hechos por el hombre. En contraparte, la geometría fractal describe por medio de algoritmos, permite dimensiones fraccionarias y es adecuada para describir formas naturales (Ortiz y Hinojosa, 1998).

Según del Alamo (2012), dicha geometría provee una descripción y una forma de modelado matemático para las complicadas estructuras de la naturaleza.

1.5.1 Concepción de la geometría fractal

El matemático griego Euclides, presentó en su obra los Elementos, la manera formal para el estudio de las propiedades de líneas y planos, círculos y esferas, triángulos y conos, es decir, las formas regulares. A lo largo del tiempo este tipo de conocimientos se han utilizado en todas las ramas para explicar los

Revisión bibliográfica

fenómenos que presenta la naturaleza; esta geometría se denomina geometría euclidiana. Sin embargo, las ideas de Euclides son aproximaciones de la realidad, ya que supone que un punto no tiene tamaño; que una línea es un conjunto de puntos que no tienen ancho ni espesor, solamente longitud y que una superficie no tiene espesor. Debido a este punto de vista, un punto tiene dimensión cero, una línea tiene dimensión uno, una superficie tiene dimensión dos y finalmente un sólido tiene dimensión tres; por lo tanto, las únicas dimensiones que existen en la geometría euclidiana son los números enteros: 0, 1, 2 y 3 (Braun, 1999).

Desde la década prodigiosa de los años 60 también Mandelbrot empezó investigando fenómenos no explicados del mundo natural (...) Se dio cuenta de que las matemáticas tradicionales eran incapaces de expresar adecuadamente este tipo de fenómenos” (Woods et al., 2005).

En la segunda mitad del siglo XX la Geometría fractal se convirtió en una nueva rama de las matemáticas, pues comenzó a considerar la simetría de los fenómenos desde una nueva perspectiva, es decir, la simetría de invarianza de escala. Esta explica la razón de que algunos objetos se parezcan a sí mismos independientemente de la variación de la escala de observación. Por ejemplo, una ramita pequeña arrancada de un brócoli, seguirá siendo como un pequeño brócoli; una rama de pino de navidad, se verá como si fuera un pequeño pino recién crecido (...) (Martínez et al., 2009).

La nueva geometría permitió revelar las propiedades más íntimas de la naturaleza, subrayando la necesidad de representar a los fenómenos tales como ellos son, en toda su riqueza como elementos multiformes, fraccionados y difusos (Mandelbrot, 1997).

Según (Martínez et al., 2009) por estas razones es que se dice que la Geometría Fractal es la geometría de la naturaleza.

Para poder hablar de fractales es necesario establecer primero lo que significa dimensión topológica y dimensión fractal, para, a partir de ello, definir el objeto fractal y su correspondiente geometría.

Revisión bibliográfica

1.5.2 Dimensión topológica de un objeto geométrico

Según Salgado (2012), la dimensión topológica es un término que introdujo Hennrry Poincaré (1854-1912), físico francés y uno de los principales matemáticos del siglo XIX.

La dimensión topológica es fácil de comprender ya que nos habla de la conectividad de los puntos del objeto de medida. “ Se dice que una figura es unidimensional, si su frontera esta compuesta de puntos; bidimensional, si su frontera esta compuesta de curvas y tridimensional, si su frontera esta compuesta de superficies” (Mandelbrot, 1997).

El concepto propio de dimensión tiene un significado matemático muy amplio por lo que existen un amplio repertorio de definiciones. Si se tiene en cuenta la definición inductiva de dimensión topológica dada por Poincaré “ un objeto tiene dimensión topológica “m” cuando cualquier recubrimiento de ese objeto, tiene dimensión topológica “m” (Falconer, 1990).

Una definición distinta de dimensión topológica es la definición por semejanza, llamada también de autosemejanza, que sugirió Felix Hausdorff en 1919, readaptada posteriormente por Besicovich (dimensión de Hausdorff-Besicovich) y que se recoge en la definición de fractal que propone Benoit B. Mandelbrot (Mandelbrot, 1975):

Si al obtener desde un ente H, N entes iguales, semejantes al original, con razón de semejanza r, entonces la dimensión topológica de H es el número real D que verifica:

$$N \cdot r^D = 1$$

$$\text{O sea: } \log N + D \cdot \log r = 0$$

Por tanto:

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{r}}$$

Revisión bibliográfica

Según Sandoval (2010), la dimensión topológica en el sentido de Poincaré coincide en general con la dimensión por semejanza de Hausdorff-Besicovich. Pero en los fractales no ocurre así. Se dice entonces, que la dimensión definida por Poincaré es su Dimensión Topológica y que la dimensión por semejanza de Hausdorff-Besicovich es su Dimensión Fractal.

1.5.3 Dimensión fractal o dimensión de Hausdorff

El desarrollo de la geometría fractal ha permitido obtener parámetros cuantitativos para definir el “grado de irregularidad” de un determinado objeto. Uno de los parámetros más representativos es el de dimensión fractal, una generalización de la dimensión euclidiana para objetos autosemejantes (Gutiérrez, 1998).

Según Majdalawi (2006), la dimensión fractal (DF) que sugirió Felix Hausdorff en 1919 es una propiedad de un objeto que nos indica su capacidad para rellenar el espacio que lo contiene, y puede tomar valores continuos en el espacio de los números reales, entre 0 y 3.

Se está acostumbrado a ver la dimensión de un objeto como un número entero que indica la cantidad de direcciones independientes o grados de libertad sobre los que uno se puede mover en el espacio que contiene a dicho objeto, es decir, su dimensión topológica. Sin embargo, a fin de estudiar los fractales, es necesario encontrar una expresión matemática que permita caracterizar la dimensión de un objeto de forma general.

Según Ortega (2013), para tal fin se considera un segmento de recta de una unidad de longitud. Si se triplica su tamaño, esto es, expandirlo con un factor de escala igual a tres, se obtiene un segmento de recta de longitud tres el cual obviamente contiene tres componentes congruentes, es decir, tres copias del segmento original de longitud uno; o sea ($3 = 3^1$). Ahora se hace lo mismo con un cuadrado de área unitaria. Si se expande por un factor de escala tres, esto es, triplicar la longitud de sus lados, se obtiene un cuadrado cuya área es nueve veces mayor. En esta ocasión se tienen nueve copias del cuadrado unitario original; ($3 = 3^2$). Finalmente se expande un cubo de volumen unitario con un

Revisión bibliográfica

factor de escala tres y se obtiene un cubo que consiste de 27 componentes congruentes ($3 = 3^3$) (Ver Figura 4).

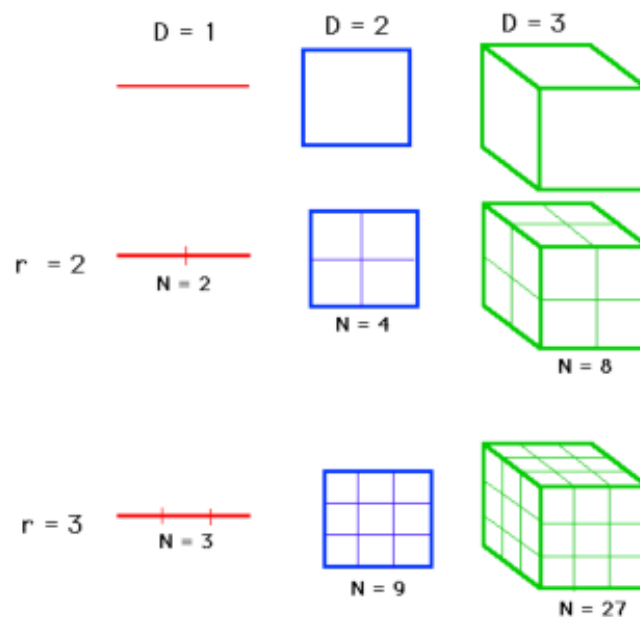


Figura 4. Concepto de dimensión. Fuente: Ortega (2013).

En cada uno de los tres casos mencionados, se tiene una dimensión D , un factor de escala r y un número de componentes N , que satisfacen la ecuación N_r . Donde N_r es el número más pequeño de copias diferentes de A en la escala r . La unión de N copias diferentes debe cubrir completamente el conjunto A .

Otros ejemplos de la validez de esta regla se muestran en la Figura 5, en donde un triángulo es expandido por un factor de escala de 2, un cuadrado por un factor de 2.5 y un segmento de recta por uno de $\sqrt{2}$.

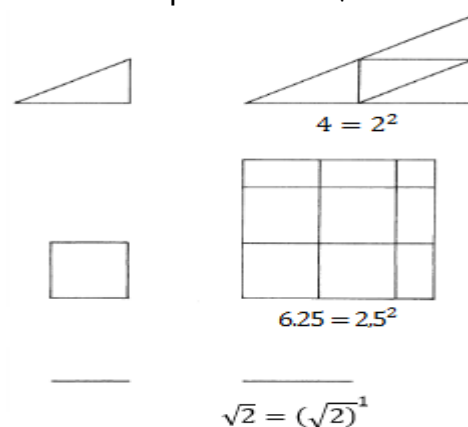


Figura 5. Ejemplos de escalamiento. Fuente: Ortega (2013).

Revisión bibliográfica

Como se demuestra en la Figura 5, ni N ni r necesitan ser estrictamente números enteros para que la ecuación $N = r^D$ sea válida. Despejando D de la ecuación anterior se obtiene la expresión general que se buscaba, misma que se conoce como dimensión de Hausdorff-Besicovitch:

$$D = \frac{\log N}{\log r}$$

Por su parte (Cattaneo et al., 2009), asevera que el principio básico para estimar la dimensión fractal se basa en el concepto de autosimilitud.

1.5.4 Métodos para determinar la dimensión fractal de un objeto

Según Ortega (2013), derivados de la matemática fractal, han surgido un gran número de métodos para analizar las propiedades fractales de fenómenos naturales, resultados de experimentos, imágenes y en general datos en los que se investiga si tienen o no, y si lo tienen, en qué medida, el comportamiento de un fractal, es decir, se analiza su dimensión fractal.

Según plantean (Santacruz et al., 2007), algunos de estos métodos son:

- Conteo de Cajas (Box-Counting).
- Divisores (método del compás).
- Relación área-perímetro.
- Análisis de imágenes y textura.

Los mismos serán explicados en los siguientes epígrafes.

1.5.4.1 Método Conteo de Cajas

Un estimador de la dimensión fractal de una imagen binarizada es el método de Conteo de Cajas. Este método se basa en el cálculo de cajas que se utilizan para cubrir por entero un objeto (Buchnícek et al., 2000).

(Cattaneo et al., 2009), plantea que el método de Conteo de Cajas es uno de los más utilizados para obtener la dimensión fractal de un objeto. Consiste en cubrir una figura con una rejilla de cuadrículas y determinar cómo varía el número de cuadrículas que se necesitan para cubrir la figura. Se repite para rejillas con cuadrículas más y más pequeñas; al disminuir el tamaño de las cuadrículas, se necesitará un mayor número de éstas para cubrir el objeto.

Revisión bibliográfica

Según Passoni (2005) la Dimensión por Conteo de Cajas está en función de la variación del número de cajas con el tamaño de las mismas. Evaluando varios tamaños de cajas se halla la relación del cambio de N_r de acuerdo a r , resultando un indicador de la complejidad de la forma. El número N_r de cuadrados necesarios para cubrir la estructura exhibe la siguiente ley de potencia:

$$N_r = \left(\frac{1}{r}\right)^D$$

Para calcular la dimensión por Conteo de Cajas se evalúa la expresión $\log N_r$ vs $\log 1/r$, donde D corresponde a la pendiente obtenida por el modelo de regresión lineal clásico ajustado por un estimador de Mínimos Cuadrados.

El proceso ignora las irregularidades de menor tamaño y estudia cómo varía el número de celdas que cubre el objeto cuando r tiende a cero y ofrece un camino sistemático aplicable a una gran diversidad de formas naturales.

Según Bourke (2014), la dimensión fractal puede definirse conforme a la fórmula de Minkowski-Bouligand como:

$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N_r}{\log 1/r}$$

Para fractales naturales con un rango de escala limitada, este límite puede no ser el enfoque más acertado. Más bien, se trazan los puntos $\log N_r$ y $\log 1/r$ identificando el rango de escalamiento, y encontrando la pendiente de la recta que mejor se ajusta a través de los puntos en el rango de escalamiento.

1.5.4.2 Divisores (Método del compás)

Otro método muy extendido y claramente relacionado con el Conteo de Cajas es el método de divisores o del compás (*Compass o ruler method*). Se utiliza para medir la dimensión fractal de perímetros.

El método del compás consiste en mover una regla de longitud δ a lo largo de la curva. La longitud estimada de dicha curva será el producto del número de pasos N de tamaño delta necesarios para cubrir la curva, esto es, $L = N\delta$. Valores de

Revisión bibliográfica

delta inferiores dará longitudes mayores; a media que la regla se hace más y más pequeña, se añaden más detalles y la longitud medida crece.

La dimensión fractal es estimada mediante la longitud L a diferentes valores de escala δ mediante la siguiente relación:

$$D = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log L}{\log \frac{1}{\delta}}$$

1.5.4.3 Relación Área - Perímetro

Según (Santacruz et al., 2007), el método de área – perímetro es utilizado generalmente para estimar la dimensión fractal de objetos complejos y no sólo su perímetro. Dependiendo de los objetivos del análisis, existen tres enfoques posibles: el método basado en el perímetro, para determinar la medida en que el perímetro del objeto a analizar, llena el plano; basado en el área, para determinar la medida en que el propio objeto llena el plano; y basada en el paisaje (objeto dividido en diferentes tipos), para comparar la complejidad del objeto.

El enfoque de la dimensión fractal perimetral mide el grado en el que el perímetro del objeto llena el plano. La relación perímetro-área está dada por:

$$P = kA^{D/2}$$

Donde el área A es el número de píxeles que conforman el objeto dado, el perímetro P es el número de píxeles en la frontera del objeto, k es una constante de escalamiento y D es la dimensión fractal, misma que se determina mediante la pendiente de la gráfica de los logaritmos del área contra el perímetro.

El enfoque de la dimensión fractal del área cuantifica la proporción del plano que es ocupada por el objeto. Esta dimensión puede ser medida como:

$$D = \frac{\log A}{\log L}$$

Donde L es la longitud máxima horizontal o vertical del objeto en píxeles, y A es el número total de píxeles que conforman el objeto.

Revisión bibliográfica

1.5.4.4 Análisis de imágenes y textura

Según (Santacruz et al., 2007), en este método una imagen, la cual se supone tiene una textura, es interpretada como un terreno en tres dimensiones en donde cada coordenada x, y de la imagen tiene una tercera dimensión asociada z que representa la intensidad de color del pixel.

Posteriormente se realiza un procesamiento muy similar al del método de Conteo de Cajas descrito en el apartado 1.5.4.1, sólo que en este caso en lugar de dividir la imagen con cajas bidimensionales, se tendrá que el terreno tridimensional es dividido en cubos de tamaño R . Se cuentan el número de cubos N que engloban el terreno a analizar y se relaciona el logaritmo de esta cantidad con el logaritmo del tamaño de los cubos. La dimensión fractal se estima con la ecuación de Minkowski-Bouligand.

La autora de la investigación asume la utilización del método Conteo de Cajas para realizar el análisis fractal de la planta *Capsicum Annuum* L., pues permite determinar características fractales mediante imágenes de la planta, lo cual facilita la investigación ya que es difícil realizar este análisis directamente a la planta pues no se cultiva todo el año.

1.5.5 Definición matemática de fractales

Según (Ortiz y Hinojosa, 1998) Matemáticamente, un fractal es un subconjunto de un espacio métrico para el cual su dimensión de Hausdorff-Besicovitch, D_{H-B} es estrictamente mayor que su dimensión topológica, D_T . La dimensión de Hausdorff-Besicovith no está restringida a tomar valores enteros.

1.5.6 Tipos de fractales

Según Majdalawi (2006), existen dos tipos bien definidos de fractales:

Fractales lineales: son aquellos que se construyen con un simple cambio en la variación de sus escalas. Esto implica algo muy importante, los fractales lineales son exactamente idénticos en todas sus escalas hasta el infinito. El triángulo y la alfombra de Sierpinski y la curva de Koch son ejemplos de fractales lineales.

Revisión bibliográfica

Fractales no lineales: en cambio, son aquellos que se generan a partir de distorsiones complejas o justamente como lo dice su nombre, y usando un término proveniente de la matemática Caótica, distorsiones no lineales. La mayoría de los objetos fractales puramente matemáticos y naturales son no lineales. Ejemplos de ellos son: el súper conocido Conjunto de Mandelbrot o el Conjunto de Julia.

Dentro de estos dos grupos de fractales y dependiendo del tipo de modelo o estructura matemática, especialmente geométrica o topológica que los genera (Vivas et al., 2005) plantea que existen múltiples clasificaciones:

1. Los fractales en tiempo de escape al infinito, del tipo Mandelbrot y Julia. (ver Anexos, Figura 19a y 19b).
2. Los fractales en tiempo de escape finito, tipo Newton. (ver Anexos, Figura 20).
3. Los fractales autosemejantes, que son los atractores de los famosos sistemas iterados de funciones (IFS's) y sus diversas clases. (ver Anexos, Figura 21).
4. Los fractales tipo bifurcación, como atractores extraños de ecuaciones en diferencias, como por ejemplo la ecuación logística. (ver Anexos, Figura 22).
5. Los atractores como límites de las órbitas de sistemas dinámicos estables.
6. Los atractores extraños, como límites de sistemas dinámicos inestables. (ver Anexos, Figura 23).

1.5.7 Características de los fractales

1.5.7.1 Autosimilitud

Según Mandelbrot (1997), un objeto es autosimilar o autosemejante si sus partes tienen la misma forma o estructura que el todo, aunque pueden presentarse a diferentes escalas y pueden estar ligeramente deformados.

Los fractales pueden presentar tres tipos de autosimilitud:

Revisión bibliográfica

1. **Autosimilitud exacta:** este es el tipo más restrictivo de autosimilitud; exige que el fractal parezca idéntico a diferentes escalas. A menudo la encontramos en fractales definidos por sistemas de funciones iteradas (IFS). Ver Anexos, Figura 22.
2. **Cuasiautosimilitud:** exige que el fractal parezca aproximadamente idéntico a diferentes escalas. Los fractales de este tipo contienen copias menores y distorsionadas de sí mismos. Matemáticamente (Sullivan, 1987) definió el concepto de conjunto cuasiauto-similar a partir del concepto de cuasi-isometría. Los fractales definidos por relaciones de recurrencia son normalmente de este tipo. Ver Anexos, Figura 23.
3. **Autosimilitud estadística:** Es el tipo más débil de autosimilitud; se exige que el fractal tenga medidas numéricas o estadísticas que se preserven con el cambio de escala. Los fractales aleatorios son ejemplos de fractales de este tipo. Ver Anexos, Figura 24.

Los fractales generalmente poseen algún tipo de autosimilitud, puede decirse que están formados por partes pequeñas que se parecen al todo. Esta similitud puede ser geométricamente estricta o bien puede ser solamente aproximada o estadística. Por ejemplo, el conjunto de Cantor está formado por dos copias estrictamente similares de sí mismo, mientras que la curva de Von Koch (ver Anexos, Figura 25 y Figura 26) está formada por cuatro réplicas. Un fractal natural, como un árbol está formado por múltiples copias, que son las ramas, aproximadamente similares al todo y a su vez, las ramas contienen copias de sí mismas. En este ejemplo, la similitud es sólo aproximada o estadística y recibe el nombre de autoafinidad (Cattaneo et al., 2009).

1.5.8 La geometría fractal en la modelación estructural de plantas

De acuerdo con Fernández (2005), la teoría fractal en la modelación estructural de plantas: corresponde a una teoría matemática [...] que en forma sencilla define que existen estructuras (matemáticas y no matemáticas) que cumplen con la característica de estar compuestas, a su vez, de estructuras de menor tamaño, que mantienen una cierta similaridad con la estructura completa, recibiendo, por lo tanto, el nombre de estructuras autosimilares. Esta teoría indica que aquellas estructuras que pueden considerarse fractales son invariantes a distintas

Revisión bibliográfica

escalas. Mandelbrot (1993), plantea que muchas formas en la estructura de la naturaleza cumplen con estas características, entre las cuales están las vegetales. Fernández (2005), plantea que la teoría fractal indica que en la construcción de muchas formas de este tipo se opera a través de re-escritura de leyes fundamentales de formación, dada una cierta secuencia de iteraciones o re-escrituras, se obtiene una forma compleja, cuyas partes son similares entre ellas y similares con el todo. Este principio es el fundamento básico de desarrollo de las plantas.

Asumiendo el criterio de (Cattaneo et al., 2009) quienes plantean y ejemplifican con estructuras vegetales (específicamente árboles) que un fractal natural presenta autosimilitud estadística; basada en la definición de autosimilitud dada por (Mandelbrot, 1997), los criterios de Fernández (2005), sobre el principio que constituye el fundamento básico de desarrollo de las plantas y según los criterios dados por los autores Molina (2012), Depestre (2009), Maroto (2000), (Orellana et al., 2000), Aldana (2001) y (Araujo et al., 2014) sobre la morfología de la planta *Capsicum Annuum* L., la autora de la investigación clasifica la misma como un fractal lineal, autosemejante que presenta autosimilitud estadística, lo que hace posible que la planta pueda ser modelada mediante la teoría de la geometría fractal; lo cual será demostrado realizando un análisis fractal a la planta mediante el método Conteo de Cajas.

1.6 Autómata celular, re-escritura y Sistemas de Lindenmayer

En la década de los 70 se generó para sistemas expertos el concepto de Autómatas Celulares. El autómata celular deriva del hecho de que las células tienen un conjunto de leyes de comportamiento, y su funcionamiento, reproducción, crecimiento, etc., dependen de estas leyes fundamentales y de las condiciones que la rodean. Este concepto en modelación se acerca mucho a las bases biológicas de comportamiento de las plantas y asociado al concepto de re-escritura da origen a procesos o estructuras más complejas (Fernández, 2005).

Bajo este concepto, el biólogo Aristid Lindenmayer, en el año 1968, creó un lenguaje matemático para la modelación de entes biológicos llamado Sistema-L.

Revisión bibliográfica

Loc.Cit. Lindenmayer es uno de los biólogos más destacados en el estudio de las características constitutivas de la forma de las plantas, quien reconoció que en diversas formas naturales en especial las plantas, la estructura está directamente relacionada con las huellas de su propio proceso de desarrollo. Por ejemplo, es natural encontrar que las pequeñas partes de un árbol se asemejen a una etapa previa en el desarrollo del mismo (Milán, 2010).

Este lenguaje se basa en los conceptos de autómata celular y de re-escritura, considerando unidades básicas con leyes establecidas de comportamiento, que se van re-escribiendo de acuerdo a las condiciones ambientales y a su programación interna. En un Sistema-L, las producciones o reglas de re-escritura son aplicadas simultáneamente en todos los puntos del objeto donde sea necesario, manteniendo así una característica propia de los seres vivos que es la ocurrencia paralela de procesos en el organismo. El organismo se podría ver entonces como un sistema compuesto por subsistemas trabajando en paralelo (Fernández, 2005).

Por lo antes expuesto relacionado con los Sistemas-L la autora de la investigación asume utilizar este lenguaje matemático para construir el modelo que describa el crecimiento de la planta *Capsicum Annuum* L., además porque es un lenguaje aplicable a cualquier estructura en la que se pueda identificar un patrón básico de desarrollo o crecimiento, lo cual se pone de manifestó en las plantas, y si el modelo construido es adecuado para el problema que representa, los resultados obtenidos permitirán explicar el fenómeno que se estudia con un alto nivel de realismo.

1.7 Sistemas de Lindenmayer

Los sistemas de Lindenmayer surgieron como un intento de describir de manera matemática el desarrollo de organismos pluricelulares. El objetivo era una formalización en la que se tuviera en cuenta las observaciones puramente morfológicas junto con los aspectos genéticos, citológicos y fisiológicos. Se pretendía proponer sistemas abstractos que sirvieran como marco teórico para estudiar todos estos aspectos. El modelo (basado en la potencia expresiva de la matemática discreta y la combinatoria) se oponía a la formalización tradicional

Revisión bibliográfica

basada en funciones continuas y ecuaciones diferenciales. El proceso consiste en discretizar tanto el espacio como el tiempo y codificar las reglas de comportamiento de manera simbólica (Ortega, 2000).

Un Sistema-L es un lenguaje, una gramática formal de derivación paralela, un conjunto de reglas y símbolos principalmente utilizados para modelar el proceso de crecimiento de las plantas, aunque también puede modelar la morfología de una gran variedad de organismos. Los Sistemas-L pueden utilizarse para generar fractales autosimilares (...) (Prusinkiewicz y Lindenmayer, 2004).

El concepto central de los Sistemas-L es el de re-escritura, una técnica para definir objetos complejos reemplazando sucesivamente “partes” de un objeto inicial simple (el axioma), mediante un conjunto de reglas de re-escritura o de producción (Campos, 2011).

1.7.1 Elementos de un Sistema-L

Los Sistemas-L constan en primer lugar, de un conjunto de reglas de generación de cadenas de símbolos y a las que se denominan reglas de producción. Las reglas de producción generarán nuevas cadenas de símbolos como resultado de su aplicación a cada uno de los símbolos de una cadena preexistente (Lahoz, 2004).

Según (Campos, 2011) se representa de la siguiente forma:

$$G = \{V, S, \omega, P\}$$

Donde:

V: el alfabeto, es un conjunto de símbolos que pueden ser reemplazados (variables o símbolos no terminales) y se utilizan para componer cadenas.

S: es un conjunto de símbolos que se mantienen fijos (constantes o símbolos terminales).

ω : el axioma, es la cadena que describe al sistema en su estado inicial, formada por un(os) símbolo(os) de V.

Revisión bibliográfica

P: reglas de producción, son las transformaciones que serán aplicadas al axioma y, sucesivamente, a las cadenas generadas. Definen las formas en las que las variables pueden ser reemplazadas por combinaciones de constantes y otras variables. Las reglas de producción generan cadenas formadas únicamente por los símbolos del alfabeto y por lo tanto todas las cadenas pertenecerán al lenguaje definido por el Sistema-L.

A continuación se presenta un ejemplo que permite entender cómo se forma un Sistema-L, según (Millán, 2010), el mismo consiste en:

- Un alfabeto que solo está conformado por las letras “X” y “Y”. Por lo tanto, todas las palabras que pueden construirse estarán conformadas por cadenas que incluyen únicamente estas letras.

Alfabeto

$\{X Y\}$

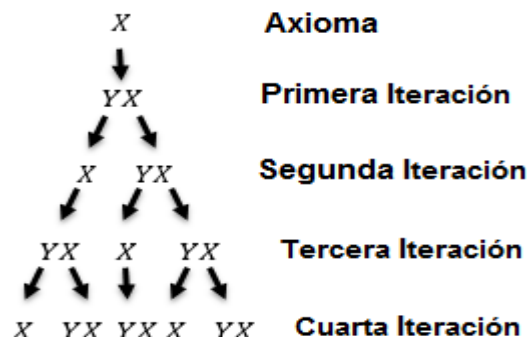
- Para cada letra, existe además una regla de re-escritura, de tal forma que puede reemplazarse por una cadena construida en el mismo alfabeto. Así el símbolo “X” se puede reescribir/transformar en la siguiente cadena “YX” y el símbolo “Y” puede reemplazarse por la cadena “X”.

Reglas de Reescritura

$X \rightarrow YX$

$Y \rightarrow X$

- El proceso de re-escritura inicia a partir de una cadena inicial llamada axioma. En este caso se iniciará con la cadena “X”.



Revisión bibliográfica

Al cabo de la cuarta iteración el axioma o cadena inicial “X” se ha transformado en la cadena “X Y X Y X X Y X”.

Según Millán (2010), los elementos que componen este sistema son en últimas muy similares al concepto aplicado en Iniciadores y Generadores para la construcción de un fractal:

1. Un conjunto de símbolos o alfabeto
2. Un axioma
3. Un conjunto de reglas de reemplazo

La utilización de estos mismos elementos son los que permiten deducir, que precisamente se pueden utilizar los principios de los Sistemas-L, para construir un fractal.

Materiales y Métodos

CAPÍTULO 2: MATERIALES Y MÉTODOS

2.1 Introducción

Una vez realizada una profunda revisión bibliográfica respecto a los referentes teóricos y tecnologías actuales existentes sobre la modelación tridimensional de plantas, las principales corrientes en las que se desarrolla la modelación de plantas a nivel mundial, las características de la planta *Capsicum Annuum* L., así como centrado la atención en la teoría de la geometría fractal y los Sistemas-L y conociendo como se aplican estos en la modelación estructural de plantas, es posible definir las tecnologías, métodos y herramientas a utilizar en la investigación. Para ello el presente capítulo recoge los siguientes aspectos: los métodos teóricos, empíricos y matemáticos – estadísticos, herramientas y tecnologías informáticas a utilizar, características botánicas de la planta que se tienen en cuenta en el modelo, análisis fractal del *Capsicum Annuum* L., el proceso que se sigue para generar el Sistema-L, los parámetros que se tienen en cuenta en el modelo, así como el modelo que simula el crecimiento de la planta, basado en Sistemas-L.

2.2 Métodos de Investigación

Nivel Teórico

- **Histórico - Lógico:** Este método se utilizó con el objetivo de contactar teóricamente la evolución de la modelación tridimensional de plantas a nivel mundial así como la utilización de la teoría fractal y los Sistemas-L en este campo, a partir de las diferentes posiciones de los autores que se destacan en las investigaciones en torno al tema.
- **Análisis y Síntesis:** Permitted a partir del análisis de los criterios de los autores, definir el uso de la teoría fractal para la modelación tridimensional de la planta *Capsicum Annuum* L.
- **Inductivo-Deductivo:** Permitted a partir del estudio del proceso de crecimiento de la planta *Capsicum Annuum* L. y los fundamentos de la teoría de la geometría fractal definir la utilización de los Sistemas-L en la modelación de fenómenos de la naturaleza, específicamente el crecimiento de plantas.

Materiales y Métodos

- **Modelación:** Mediante el uso de la teoría fractal y los Sistemas-L se puede modelar en 3D el crecimiento de la planta *Capsicum Annuum* L. para su uso en simuladores de robots agrícolas.

Matemáticos – Estadísticos: Se utilizó en el análisis fractal realizado a las imágenes tomadas de la planta *Capsicum Annuum* L., pues para el Conteo de Cajas se hace un ajuste lineal por el método de Mínimos Cuadrados, con el objetivo de demostrar la presencia de una relación lineal lo que implica características fractales en la planta.

2.3 Tecnologías Informáticas utilizadas en la investigación

2.3.1. MATLAB

MATLAB es un paquete de software para el desarrollo de algoritmos, el análisis de datos, la visualización y el cálculo numérico, es uno de los más utilizados actualmente en el mundo de la docencia y la investigación, dispone de entre sus muchas herramientas una específica para el procesamiento digital de imágenes. Esta *toolbox* de procesamiento digital de imágenes está formada por un conjunto de funciones adicionales que amplían la capacidad del entorno numérico de Matlab y permite realizar un gran número de operaciones de procesamiento digital de imágenes directamente a través del programa principal (Laorden, 2012).

En la presente investigación fue utilizado Matlab por las ventajas que ofrece para el procesamiento digital de imágenes, el mismo se utilizó para simular la malla sobre la imagen de la planta e ir variando el tamaño de las cuadrículas al aplicar el Método Conteo de Cajas.

2.3.2 Software estadístico: Statgraphics-Plus 5.1

Es cada vez más generalizada la utilización de técnicas estadísticas para el análisis de datos por parte de profesionales e investigadores provenientes de todos los ámbitos (García, 2011). Es lógico, por tanto, la aparición de programas que permiten la realización sistemática, en un entorno común, de distintos análisis estadísticos a partir de un sistema de comunicación con el ordenador, conciso y sencillo para el usuario no especializado. Entre ellos está Statgraphics,

Materialles y Métodos

un paquete de software para análisis de datos estadísticos (Bernardo y Calderón, 2012).

En la presente investigación se utiliza Statgraphics-Plus 5.1 para representar los valores obtenidos de aplicar el método Conteo de Cajas, se hace un Análisis de Regresión para demostrar la presencia de una relación lineal, lo que demuestra características fractales en la planta; se determina la dimensión fractal de la planta a partir de la pendiente de la recta.

2.3.3 Lparser

Según Rivero (2006), Lparser es un software gratuito orientado a la simulación de Sistemas-L en tres dimensiones creado por Laurens Lapré. Es un programa en el que el usuario tiene la posibilidad de especificar el nivel de recursión, lo que afectara más tarde a la complejidad de la forma resultante. Además el programa incorpora la posibilidad de introducir mutaciones de dos clases, lentas y suaves o bruscas y rápidas, que afectaran mediante un número determinado de unidades de tiempo al crecimiento de la estructura biológica. El programa Lparser requiere que se edite un fichero en formato ASCII organizado de acuerdo con la estructura que se muestra en la Figura 6 (Lahoz, 2004).

```
# documentación interna
:
:
#
número # nivel de recursión
número # ángulo básico
número # grosor del trazo de línea
cadena de símbolos # axioma
cadena de símbolos # primera regla de producción
cadena de símbolos # segunda regla de producción
... ..
cadena de símbolos # n-ésima regla de producción
@ # fin del fichero
```

Figura 6. Fichero en formato ASCII con la estructura del Lparser. Fuente: (Lahoz, 2004).

La Figura 7 muestra el alfabeto de símbolos utilizado por Lparser para escribir las reglas de producción y los parámetros requeridos de acuerdo con la estructura propia del fichero.

Materiales y Métodos

Símbolos de orientación:

+	giro izquierda (vector U)
+(x)	giro x unidades izquierda (vector U)
-	giro derecha (vector U)
-(x)	giro x unidades derecha (vector U)
&	cabeceo abajo (vector L)
&(x)	cabeceo x unidades abajo (vector L)
^	cabeceo arriba (vector L)
^(x)	cabeceo x unidades arriba (vector L)
<	rodar izquierda (vector H)
<(x)	rodar x unidades izquierda (vector H)
>	rodar derecha (vector H)
>(x)	rodar x unidades derecha (vector H)

Símbolos de orientación especiales:

l	giro 180 grados (vector U)
%	rodar 180 grados (vector H)
\$	rodar hasta la horizontal
~	girar/cabeceo/rodar en dirección aleatoria
~(x)	girar/cabeceo/rodar en dirección aleatoria con un máximo de x grados
t	corrección para gravedad de 0.2
t(x)	corrección para gravedad de x

Símbolos de movimiento cuando { } esté activo:

F	movimiento adelante y dibuja distancia recorrida
F(x)	movimiento x unidades adelante y dibuja distancia recorrida
Z	movimiento adelante y dibuja la mitad de la distancia recorrida

Símbolos de movimiento cuando { } esté activo:

F	movimiento adelante y dibuja distancia recorrida
F(x)	movimiento x unidades adelante y dibuja distancia recorrida
Z	movimiento adelante y dibuja la mitad de la distancia recorrida
Z(x)	movimiento x unidades adelante y dibuja
f	movimiento adelante (distancia completa)
f(x)	movimiento x unidades adelante
z	movimiento adelante (mitad de la distancia)
z(x)	movimiento x unidades adelante
g	movimiento adelante (distancia completa), no registra vértice
g(x)	movimiento x unidades adelante, no registra vértice
.	no mover

Símbolos de estructura:

[	push estado actual
]	pop estado actual
{	comienzo forma poligonal
}	final forma poligonal

Símbolos de Incremento/Decremento:

“	incremento de longitud por 1.1
‘	decremento de longitud por 0.9
“(x)	multiplica longitud por x, también ‘(x)
;	incremento de ángulo por 1.1
:	decremento de ángulo por 0.9
;(x)	multiplica ángulo por x, también :(x)
?	incremento de grosor por 1.4
!	decremento de grosor por 0.7
?(x)	multiplica el grosor por x, también !(x)

Símbolos adicionales:

c	incremento del índice de color:
c(x)	fija el índice color igual a x
*	recomponer color, grosor, longitud y ángulo
@	fin de objeto

Figura 7. Alfabeto del Lparser. Fuente: (Lahoz, 2004).

Materiales y Métodos

Los objetos creados con Lparser están formados a partir de formas geométricas elementales como cilindros y prismas, pero es muy frecuente querer usar en el sistema otros tipos de objetos, como por ejemplo hojas. Su creación es posible en Lparser y estará basada en la creación de caras poligonales triangulares de cuya unión surgirá la forma geométrica deseada. La definición de formas poligonales se lleva a cabo situando vértices con los comandos de movimiento y poniendo el código resultante entre corchetes [] (Rivero, 2006).

El Lparser ofrece la posibilidad de exportar el Sistema-L creado a varios programas de generación de imágenes en 3D. Loc Cit.

En la presente investigación se define la utilización del Lparser como herramienta para validar el modelo, permitiendo simular la planta en diferentes etapas de su crecimiento y visualizarlo mediante un visor 3D.

2.3.4 Cortona3D Viewer 6.0

Cortona 3D Viewer es un visor Web rápido y altamente interactivo para la visualización de modelos 3D en la Web. Es compatible con diversas tecnologías para desarrollo 3D y con todos los formatos de VRML. El programa dispone de las opciones habituales de los visores 3D para la web, como pueden ser la selección de las distintas vistas, movimiento en primera persona, estudio de objetos, etc. Está desarrollado por la empresa Parallel Graphics y es gratuito (Vizcaíno, 2012).

Cortona 3D se instala con facilidad, y su uso está muy extendido, funciona como un plugin VRML para los navegadores más populares de Internet (Internet Explorer, Netscape, Mozilla, Firefox, etc). Otras características del Cortona3D Viewer incluyen soporte completo de VRML 97, rendering avanzado y la velocidad de procesamiento mejorada (Anon., 2012).

En la presente investigación se utiliza Corton3D Viewer 6.0 para visualizar el resultado de parsear el Sistema-L, permitiendo capturar imágenes del crecimiento de la planta en diferentes etapas, lo que valida el modelo propuesto.

Materiales y Métodos

2.4 Características botánicas del *Capsicum Annuum* L. que se tienen en cuenta en el modelo.

Según (de Reffye et al., 1988) El crecimiento de la planta es el resultado de la evolución de algunos tejidos celulares específicos (parte interna de la yema), los llamados meristemas. Una yema puede, en un tiempo dado, morir, y no va a producir nada en ningún período de tiempo, o puede dar a luz a una flor (y luego la yema muere).

El eje de las hojas es el elemento fundamental del enfoque arquitectónico. Es el resultado de la actividad de la yema situada en su punta, lo que es llamado yema apical; está hecho de una serie de entrenudos; un entrenudo es una parte del vástago hecho de un material leñoso en la punta en los cuales se puede encontrar una o varias hojas. Entre dos entrenudos existe un nudo que lleva las hojas y brotes; cada nudo tiene al menos una hoja, en cada axila de las hojas, se encuentra lo llamado yema axilar. Lo anteriormente dicho se ilustra en la Figura 8.Loc.Cit.

El crecimiento de los ejes de las hojas de la planta es el resultado de la evolución de sus yemas apicales. Una noción central para el modelo es la secuencia de crecimiento de entrenudos y nudos producidos (usualmente en un período de tiempo corto) por el brote apical del nodo anterior.

Otra noción importante está relacionada con el orden de un eje (ver Figura 8). El primer orden del eje de la planta es la secuencia de unidades de crecimiento de tal manera que cada una de estas unidades de crecimiento nace de la yema apical de la anterior.

Materiales y Métodos

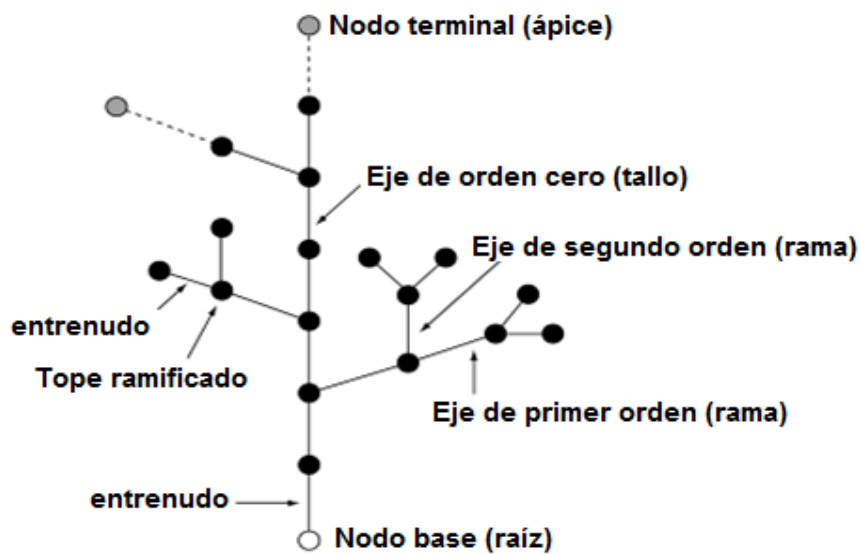


Figura 8. Percepción del eje de las hojas y del orden de un eje. Fuente: Elaboración propia.

Según (Rosas et al., 2014), el sistema de ramificación de *Capsicum Annuum* L. consiste en tallos principales, los cuales se ramifican y forman brotes. Se pueden distinguir dos tipos de crecimiento de los tallos principales:

- Crecimiento tipo A: los tallos principales crecen en forma indeterminada, se desarrollan una o dos flores por nudo y los entrenudos compactos nunca se desarrollan.
- Crecimiento tipo B: después de la primera ramificación del eje principal aparecen entre nudos compactos y el crecimiento del tallo principal finaliza en un racimo de flores. Da la apariencia de que existen más de dos flores por nudo. Los brotes laterales se desarrollan a partir de los nudos del eje principal y de los tallos principales.

Material es y Métodos

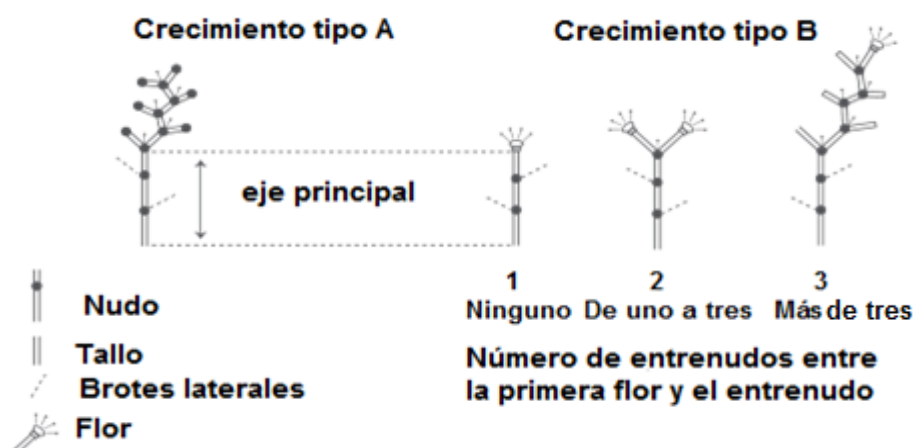


Figura 9. Sistema de Ramificación del *Capsicum Annuum* L. Fuente: (Rosas et al., 2014).

En cuanto a la filotaxis (distribución de las hojas en el tallo) de la planta, se puede observar que las hojas se encuentran distribuidas de forma alterna. Véase Figura 10.



Figura 10. Planta de *Capsicum Annuum* L. con 38 días de edad que muestra una distribución alterna en sus hojas. Fuente: Elaboración propia.

Materiales y Métodos

2.5 Análisis fractal del Capsicum Annuum L.

Desde hace un tiempo el modelado de fractales y sus conceptos asociados se han convertido en importantes herramientas en diversas áreas de las ciencias naturales, principalmente debido a que el modelado de fractales no supone que los objetos estudiados tienen buenas propiedades de continuidad y “suavidad”. Una de las características más importantes de la geometría fractal es que permite la caracterización de irregularidades que no pueden tratarse mediante la geometría euclidiana. Como resultado, se definen varias características fractales, entre las cuales la dimensión fractal es una de las más importantes.

Según Oppenheimer (1986), la noción geométrica de autosimilitud fractal se ha convertido en un paradigma de la estructura en el mundo natural. En ninguna parte este principio se hace más evidente que en el mundo de la botánica. La ramificación recursiva a diferentes niveles de escala, es un mecanismo primario de crecimiento en la mayoría de las plantas.

Muchos patrones de la naturaleza son irregulares y la geometría euclidiana no puede describir su forma. Por lo tanto, el análisis fractal ha recibido una creciente atención debido al número de estudios que han demostrado que la dimensión fractal puede ser utilizada para caracterizar estructuras biológicas complejas.

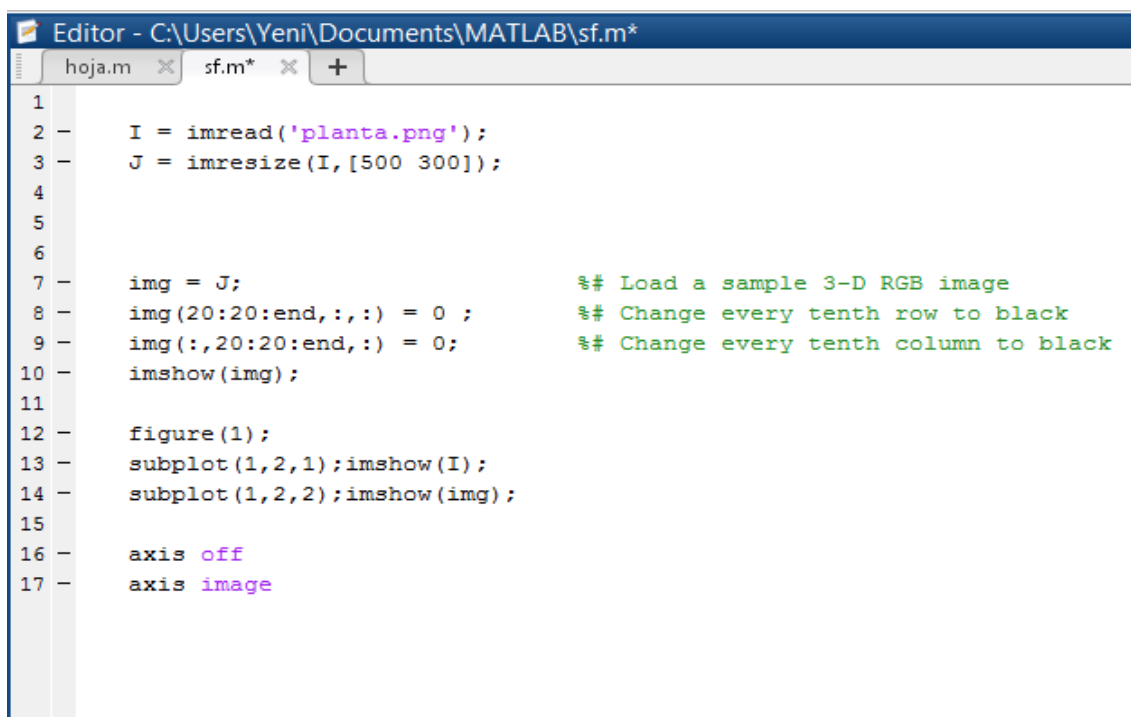
En la presente investigación para demostrar las características fractales en la planta de Capsicum Annuum L. fue aplicado un análisis fractal a partir del método Conteo de Cajas, este análisis estuvo dado por la determinación de la dimensión fractal de la planta a partir de la digitalización de imágenes obtenidas de la misma. La planta de Capsicum Annuum L. tiene formas y estructuras irregulares y por lo tanto, es posible emplear el análisis fractal para caracterizarla.

2.5.1 Aplicación del Método Conteo de Cajas para el análisis fractal de la planta Capsicum Annuum L.

Para calcular la dimensión fractal de la planta Capsicum Annuum L., fue aplicado el método Coteo de Cajas explicado en el epígrafe 1.5.4.1, el procedimiento seguido se describe a continuación.

Materiales y Métodos

Se simula una malla uniformemente espaciada sobre la imagen de la planta y se cuenta cuantas cuadrículas se requieren para cubrir el conjunto, esto se logró mediante una función programada en el Matlab (Ver Figura 11) la cual al disminuir los tamaños de la cuadrículas para cada iteración permitió registrar la cantidad mínima de cuadrículas que cubría la imagen. La dimensión fractal del objeto se calcula viendo cómo cambia este número al ir haciendo la malla más y más fina (ver Figura 12).



```
Editor - C:\Users\Yeni\Documents\MATLAB\sf.m*
hoja.m x sf.m* +
1
2 - I = imread('planta.png');
3 - J = imresize(I,[500 300]);
4
5
6
7 - img = J;                                %# Load a sample 3-D RGB image
8 - img(20:20:end,:,:) = 0;                 %# Change every tenth row to black
9 - img(:,20:20:end,:) = 0;                 %# Change every tenth column to black
10 - imshow(img);
11
12 - figure(1);
13 - subplot(1,2,1);imshow(I);
14 - subplot(1,2,2);imshow(img);
15
16 - axis off
17 - axis image
```

Figura 11. Función en Matlab programada para simular la malla sobre la imagen.
Fuente: Elaboración propia.

Materialles y Métodos

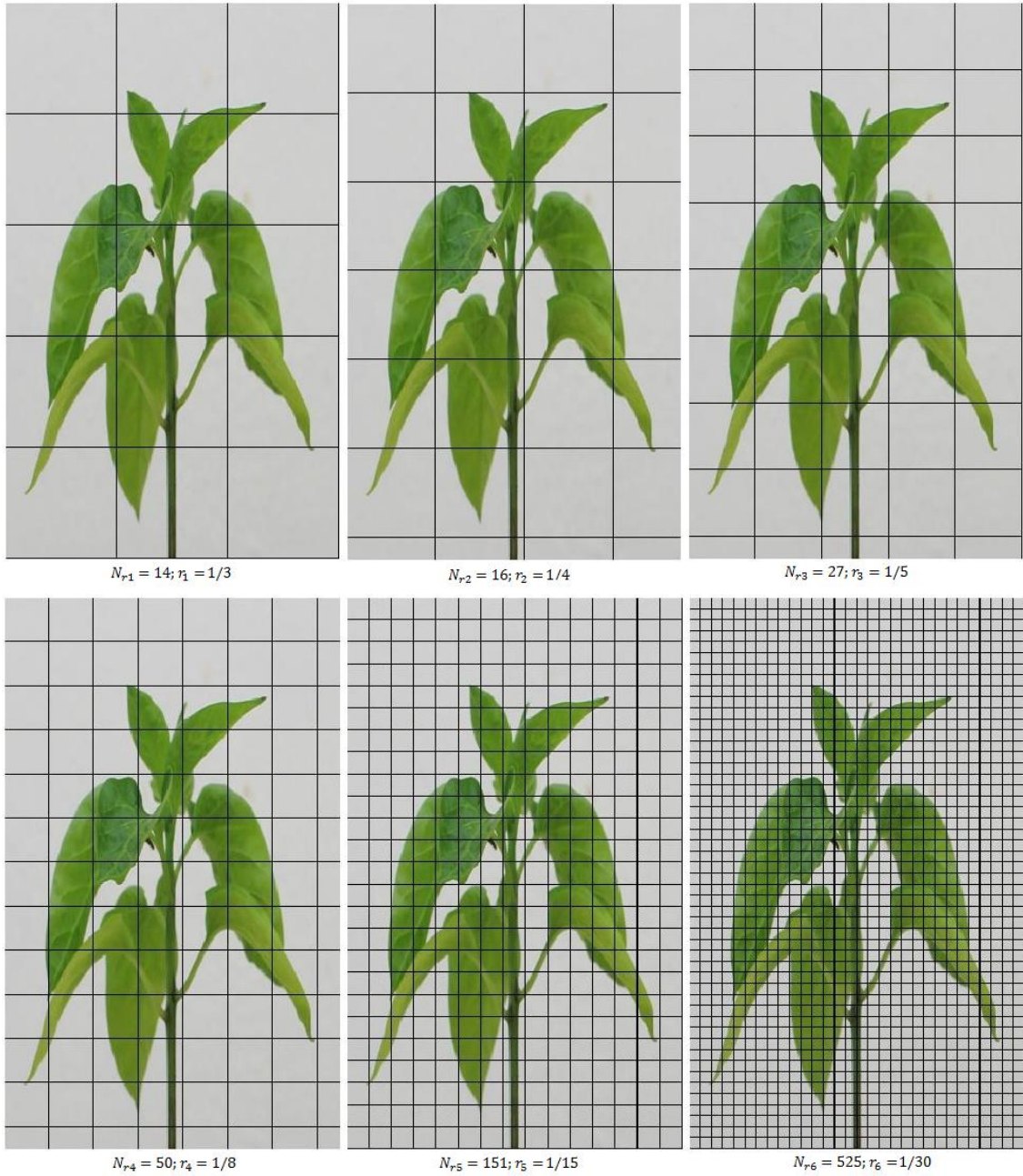


Figura 12. Método Conteo de Cajas aplicado para calcular la dimensión fractal de la planta *Capsicum Annuum* L. Fuente: Elaboración propia.

Según Bourke (2014), de esta forma, suponiendo que N_r es el número de cuadrículas en la escala r requeridas para cubrir el objeto, entonces su dimensión fractal se define conforme a la fórmula de Mimkowski-Bouligand como sigue:

$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N_r}{\log \frac{1}{r}}$$

Materiales y Métodos

Así se registra el número de cuadrículas que contiene la planta de Capsicum Annuum L. (N_r) y el factor de escala (r), al ir haciendo esta última cada vez más pequeñas. Se calcula el logaritmo de estos dos valores y aplicando un análisis de Regresión Lineal ajustado por un estimador de Mínimos Cuadrados se puede observar que guarda una relación lineal, como muestra la Figura 13.

Según Bourke (2014), la presencia de una relación lineal implica que el objeto analizado es un fractal donde la pendiente de la recta será la dimensión fractal buscada.

N_r	$1/r$	$\log N_r$	$\log 1/r$
14	3	1,146128	0,477121
16	4	1,204119	0,602059
27	5	1,431363	0,698970
50	8	1,698970	0,903089
151	15	2,178976	1,176091
525	30	2,720159	1,477121
D= 1,61726			

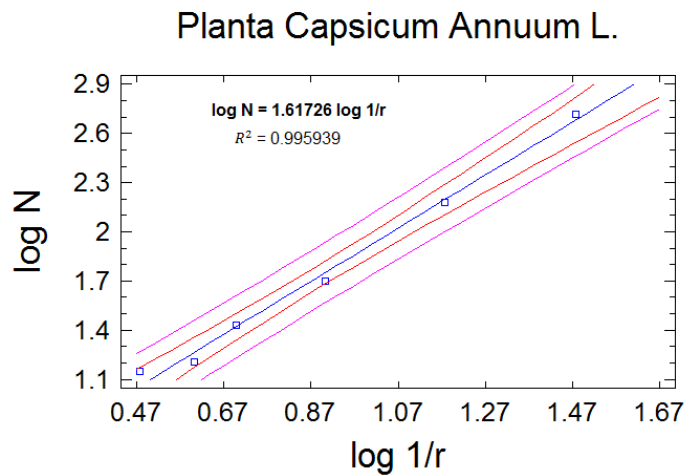


Figura 13. Cálculo de la dimensión fractal de la planta Capsicum Annuum L.
Fuente: Elaboración propia.

Según se observa en la ecuación de la recta que se muestra en la Figura 13, la dimensión fractal de la planta Capsicum Annuum L. es 1,61726, y aunque este valor no será utilizado en la propuesta del modelo, si resulta importante mencionar que constituye un indicador de complejidad de la forma de la planta.

A partir de este análisis y una vez demostrado que la planta de Capsicum Annuum L. es un fractal es posible diseñar un modelo basado en Sistemas-L con característica fractales el cual describa el crecimiento de la panta.

2.6 Proceso que se sigue para generar el modelo de Sistema-L de la planta Capsicum Annuum L.

El proceso que se sigue para generar el Sistema-L es:

Materiales y Métodos

1. Observar el desarrollo del sistema en general que se quiere modelar, en el caso de la presente
2. investigación, el desarrollo del crecimiento de la planta *Capsicum Annuum* L.
3. Identificar los tipos de elementos que interactúan y las variables que intervienen en el fenómeno, o sea, los elementos de la planta que se quieren modelar, que serán utilizados como símbolos del sistema, así como los parámetros de crecimiento de la planta de pimiento (*Capsicum Annuum* L.) que se utilizarán como parámetros de los símbolos.
4. Identificar las normas de desarrollo o producción de cada elemento de la planta, o sea las reglas de producción del nuevo Sistema-L que no son más que las transformaciones que serán aplicadas al axioma y luego a las cadenas que se vayan generando en cada iteración.

Así es posible diseñar el Sistema-L que se aproxime al desarrollo del crecimiento de la planta *Capsicum Annuum* L., y entre más detalles se consideren, se logrará una representación mucho más realista.

2.7 Parámetros que se tienen en cuenta para el modelo

Para simular el crecimiento de la planta se deberán controlar los siguientes parámetros de entrada:

Tabla 2. Parámetros que se tienen en cuenta en el modelo

1. Ángulo de las ramas con respecto al tallo.	Se asume 45° según observaciones realizadas por la autora de la investigación a la planta.
2. Filotaxis (distribución de las hojas a lo largo del tallo)	Distribución alterna (Orellana et al., 2000)
3. Parámetros geométricos de un entrenudo: longitud (cm)	Se asumen los siguientes valores según (Montes, et al., 2014), 7,22; 7,40 y 7, 49 cm aproximadamente.

Materiales y Métodos

4. Diámetro del tallo (cm)	Se asume según (Moreno, et al., 2012) en los resultados de su investigación que el diámetro es 1,98 cm.
5. Ramificación. Diámetro de las ramas (cm).	Según los resultados obtenidos por (Montes, et al., 2014) el diámetro varía entre 1,157 y 1,177 cm aproximadamente.
6. Número de hojas	Se asumen los siguientes valores según (Romero, 2013), de 25 a 598 según el número de días después del trasplante.
7. Tamaño de una hoja (cm)	4-12 cm de largo por 1,5-4 cm de ancho.
8. Peso promedio del fruto (g)	Entre 140 y 160 g

En cuanto a los parámetros relacionados con el largo de los frutos (cm) y diámetros de los frutos (cm), la autora de la investigación asume los resultados obtenidos por (Luna et al., 2015) sobre efectos de abonos orgánicos en el crecimiento y desarrollo del pimiento (*Capsicum annuum* L.) para ser usados en los parámetros del modelo. Los mismos se muestran a continuación.

Tratamiento	Largo de frutos (cm)		
	Primera cosecha	Segunda cosecha	Tercera cosecha
Vermicompost	12,53	11,94	12,49
Jacinto de agua	13,32	12,74	11,63
50 % V y 50 % JA	12,40	12,66	12,25
Control	11,84	12,40	7,73
C.V. (%)	10,25	12,25	16,45

Tabla 3. Largo de los frutos por cosecha de la planta de *Capsicum Annuum* L. que se asumen según los resultados obtenidos por (Luna et al., 2015) para ser evaluados en el modelo.

Material es y Métodos

Tratamiento	Diámetro de frutos (cm)		
	Primera cosecha	Segunda cosecha	Tercera cosecha
Vermicompost	5,05	5,28	4,93
Jacinto de agua	4,87	4,67	4,54
50% V y 50% JA	5,09	4,78	4,52
Control	4,21	4,18	3,67
C.V. (%)	9,20	12,15	7,21

Tabla 4. Diámetro de los frutos por cosecha de la planta de *Capsicum Annuum* L. que se asumen según los resultados obtenidos por (Luna et al., 2015) para ser evaluados en el modelo.

2.8 Modelo que genera el crecimiento de la planta *Capsicum Annuum* L.

El modelo planteado a continuación describe el crecimiento de la planta *Capsicum Annuum* L. mediante un Sistema-L. Antes de plantear el Sistema-L se define el significado de los símbolos y parámetros utilizados en el modelo como sigue:

P : yema apical

H : hoja

E : entre nudo

F : flor

A : fruto

[]: inicio y fin de una rama

n : nivel

h : número de hojas

f : número de flores

l_h : largo de una hoja

a_h : ancho de una hoja

l : longitud de un entre nudo

t : tamaño de una flor

d : diámetro de un fruto

la : largo de un fruto

Material es y Métodos

p : peso de un fruto

α : ángulo de las ramas con respecto al tallo

ΔE_l : longitud que aumenta un entre nudo en un período de tiempo

ΔH_l : largo que aumenta una hoja en un período de tiempo

ΔH_a : ancho que aumenta una hoja en un período de tiempo

ΔA_l : largo que aumenta un fruto en un período de tiempo

ΔA_d : diámetro que aumenta un fruto en un período de tiempo

ΔA_p : peso que aumenta un fruto en un período de tiempo

ΔF_t : tamaño que aumenta una flor en un período de tiempo

M_{At} : tamaño máximo de un fruto

M_{F_t} : tamaño máximo de una flor

M_{Et} : tamaño máximo de un entrenudo

Sistemas-L: Planta Capsicum Annuum L.

Símbolos: $P, E, H, F, A, [,]$

Parámetros:

- **Entrenudo:** n, l, α, h, f
- **Hoja:** n, l_h, a_h
- **Fruto:** p, d, l_a
- **Flor:** n, t
- **Yema apical:** n

Axioma: P

Reglas de producción:

$P(n) \rightarrow E(n, l, \alpha, h, f)P(n)$		I
$p_1(\pi 1): E(n, l, \alpha, h, f) \rightarrow H(0, l_h, a_h)E(l, \alpha, h - 1, f)$	$h > 0$	II
$p_2(\pi 2): E(n, l, \alpha, h, f) \rightarrow F(0, t)E(l, \alpha, h, f - 1)$	$f > 0$	III
$p_3(\pi 3): E(n, l, \alpha, h, f) \rightarrow [E(n + 1, l, \alpha, h, f)P(n + 1)]E(n, l, \alpha, h, f)$		IV
$p_4(\pi 4): E(n, l, \alpha, h, f) \rightarrow E(n, l + \Delta E_l, \alpha, h, f)$	$l < M_{Et}$	V
$p_5(\pi 5)F(n, t) \rightarrow A(p, d, l_r)$		VI
$p_6(\pi 6)F(n, t) \rightarrow F(n, t + \Delta F_t)$	$t < M_{F_t}$	VII

Materiales y Métodos

$$H(n, l_h, a_h) \rightarrow H(n, l_h + \Delta H_l, a_h + \Delta H_a)$$

VIII

$$A(p, d, l_a) \rightarrow A(p + \Delta A_p, d + \Delta A_d, l_a + \Delta A_l)$$

$p < M_{A_t}$ **IX**

Resultados y Discusión

CAPÍTULO 3: RESULTADOS Y DISCUSIÓN

3.1 Introducción

Al emular la lógica de la naturaleza en un ordenador mediante el uso de programas de simulación se captura la esencia de los objetos naturales, sirviendo así como una herramienta de la ciencia, es por ello que el presente capítulo describe el procedimiento del Sistema-L definido para la simulación de la planta *Capsicum Annuum* L. Se muestran resultados de la simulación de la planta, obtenidos de parsear el modelo a través del software Lparser, herramienta para validar que el modelo de Sistema-L propuesto simula el crecimiento de la planta evidenciando características fractales al simular la planta en diferentes etapas de su crecimiento, así como el pseudocódigo que traduce el modelo en un lenguaje natural.

3.2 Descripción del modelo que genera el crecimiento de la planta *Capsicum Annuum* L.

Primeramente se define el alfabeto formado por los siguientes símbolos P, E, H, F, A, [,]. Sean las reglas de crecimiento el siguiente conjunto de reglas de producción:

$P(n) \rightarrow E(n, l, \alpha, h, f)P(n)$		I
$p_1(\pi 1): E(n, l, \alpha, h, f) \rightarrow H(0, l_h, a_h)E(l, \alpha, h - 1, f)$	$h > 0$	II
$p_2(\pi 2): E(n, l, \alpha, h, f) \rightarrow F(0, t)E(l, \alpha, h, f - 1)$	$f > 0$	III
$p_3(\pi 3): E(n, l, \alpha, h, f) \rightarrow [E(n + 1, l, \alpha, h, f)P(n + 1)]E(n, l, \alpha, h, f)$		IV
$p_4(\pi 4): E(n, l, \alpha, h, f) \rightarrow E(n, l + \Delta E_l, \alpha, h, f)$	$l < M_{E_t}$	V
$p_5(\pi 5)F(n, t) \rightarrow A(p, d, l_r)$		VI
$p_6(\pi 6)F(n, t) \rightarrow F(n, t + \Delta F_t)$	$t < M_{F_t}$	VII
$H(n, l_h, a_h) \rightarrow H(n, l_h + \Delta H_l, a_h + \Delta H_a)$		VIII
$A(p, d, l_a) \rightarrow A(p + \Delta A_p, d + \Delta A_d, l_a + \Delta A_l)$	$p < M_{A_t}$	IX

Se asume para el tiempo de simulación $t = 0$ las condiciones iniciales dadas por una cadena de símbolos previamente especificada, en este caso la cadena formada por un único símbolo:

Resultados y Discusión

$$P(n)$$

Aplicando a continuación las reglas de crecimiento se tendrá que para el tiempo de simulación $t=1$ la cadena resultante es:

$$E(n, l, \alpha, h, f)P(n)$$

resultado de sustituir, de acuerdo con la primera regla de producción, el símbolo P con EP. Aplicando de nuevo las reglas de crecimiento, se tiene para $t=2$ las siguientes cadenas resultantes:

$$H(0, l_h, a_h)E(l, \alpha, h-1, f)E(n, l, \alpha, h, f)P(n) \quad \text{I}$$

$$F(0, t)E(l, \alpha, h, f-1)E(n, l, \alpha, h, f)P(n) \quad \text{II}$$

$$[E(n+1, l, \alpha, h, f)P(n+1)]E(n, l, \alpha, h, f)E(n, l, \alpha, h, f)P(n) \quad \text{III}$$

$$E(n, l + \Delta E_l, \alpha, h, f)E(n, l, \alpha, h, f)P(n) \quad \text{IV}$$

Siendo las cuatro nuevas cadenas el resultado de sustituir en la primera, el símbolo E por HE y sus correspondientes parámetros de acuerdo con la segunda regla y, P por EP y sus parámetros tal y como se especifica en la primera regla; en la segunda cadena, el resultado de sustituir E por FE y sus parámetros, de acuerdo con la tercera regla y, P por EP y sus parámetros, según lo especifica la primera regla; en la tercera cadena, el resultado de sustituir E por [EP]E y P por EP con los parámetros correspondientes en cada sustitución; en la cuarta y última cadena el resultado de sustituir E por E como lo especifica la cuarta regla y P por EP según plantea la primera regla, en ambas sustituciones con los parámetros correspondientes.

Se puede observar que a diferencia de la segunda iteración en la que sólo se obtuvo 1 cadena resultante, para $t=3$, se obtuvieron 4 cadenas, esto se debe a que en una planta un entrenudo puede producir en un momento dado una hoja o una flor o crear una nueva rama formándose un nuevo entrenudo o simplemente el entrenudo no produce nada, sino que se mantiene y aumenta su longitud; en este caso el modelo asigna una probabilidad de ocurrencia para cada una de las posibles producciones que puedan obtenerse, basado en como ocurre este proceso en el crecimiento real de la planta de pimiento, a partir de esta probabilidad de ocurrencia se selecciona la regla aplicar de forma aleatoria,

Resultados y Discusión

es por ello, que el sistema lineal que genera el crecimiento de la planta *Capsicum Annuum* L. propuesto en la presente investigación tiene la característica de ser un sistema estocástico, probabilístico pues según Campos (2011), un Sistema-L se puede clasificar como estocástico, probabilístico cuando hay varias producciones para un mismo símbolo y cada una de ellas es elegida con una probabilidad determinada. Este proceso se evidencia en el modelo propuesto, ya que existen símbolos en el sistema al que le corresponden más de una producción, y esto fue determinando por las características propias, reales del crecimiento de la planta de Ají.

En resumen, aplicando las reglas de producción, definidas como reglas de crecimiento de la planta a una cadena de símbolos preexistentes, se obtiene una nueva cadena, repitiéndose la sustitución de símbolos iterativamente; ahora bien, al sustituir una y otra vez en cada iteración y de acuerdo con las reglas de crecimiento los símbolos de la cadena obtenida en la iteración anterior, la estructura del sistema aumenta su complejidad lo que hace que sea imposible describir el proceso sin la ayuda de una herramienta que interprete el modelo para su visualización gráfica.

Es importante destacar que las reglas de producción de las nuevas partes son las mismas que se usaron para crear las partes anteriores, de esta forma se logra una estructura en la cual cada parte de la misma se parece al total, lo que se conoce como “autosimilaridad” y facilita la descripción de formas tipo fractales. Otra consideración importante está relacionada a que las reglas de producción se aplican simultáneamente a todos los símbolos de la cadena de entrada, sea esta el axioma o las cadenas resultantes de cada derivación, lo cual según Campos (2011), es una propiedad que refleja el origen biológico de lo Sistemas-L, ya que los organismos vivos crecen simultáneamente en “todas” sus partes y no secuencialmente.

La aplicación de los sistemas-L en la modelización y simulación del crecimiento y la forma de estructuras biológicas puede ser abordada de dos formas; ya sea programando el modelo en un lenguaje de alto nivel o utilizando alguno de los programas orientado a la simulación de Sistemas-L. Un ejemplo de estos

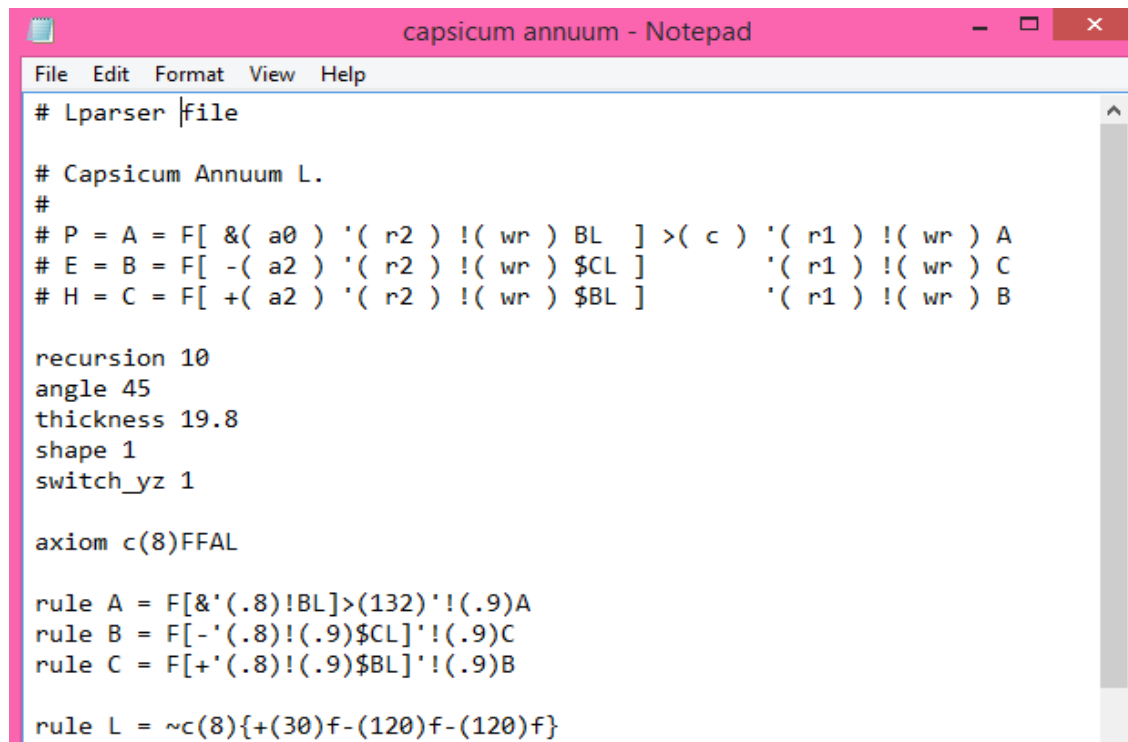
Resultados y Discusión

programas es el Lparser, el cual se utilizó en la investigación para validar que el modelo descrito simula la planta en diferentes etapas de su crecimiento.

Lparser permite especificar para el modelo de Sistema-L que será representado, el nivel de recursión, lo que afectara la complejidad de la forma resultante, el mismo requiere que se edite un fichero en formato ASCII organizado de acuerdo a la estructura vista en el epígrafe 2.3.4 con el Sistema-L que se está modelando; a continuación y utilizando Lparser se obtendrá a partir del fichero con el Sistema-L Capsicum Annuum L. (Ver Figura 14) un nuevo fichero de salida con extensión .wrl, devuelto al parsear el fichero de entrada (Ver Figura 15), el cual se visualizará con el programa Cortona3DViewer 6.0, en el que se observa la simulación de la planta, mostrando en cada iteración diferentes etapas de su crecimiento. (Ver Figura 16, Figura 17 y Figura 18). Este último programa mencionado incluye la posibilidad de rotar las estructuras, cambiar el punto de observación, efecto de zoom, distancia de enfoque, entre otras.

Para la validación del modelo con el Lparser se tuvo en cuenta el crecimiento de la planta hasta que la misma comienza a ramificarse y a producir hojas, pues lo que se quería era validar que el modelo realmente simulara la planta y que además para ello utilizara características fractales en el crecimiento de la misma, esto se pudo comprobar satisfactoriamente en las imágenes que visualizan cada una de las iteraciones del modelo pues se aprecia que la formación de cada una de sus partes es similar al todo, siendo este comportamiento característico de los fractales.

Resultados y Discusión



```
# Lparser file

# Capsicum Annuum L.
#
# P = A = F[ &( a0 ) '( r2 ) !( wr ) BL ] >( c ) '( r1 ) !( wr ) A
# E = B = F[ -( a2 ) '( r2 ) !( wr ) $CL ] '( r1 ) !( wr ) C
# H = C = F[ +( a2 ) '( r2 ) !( wr ) $BL ] '( r1 ) !( wr ) B

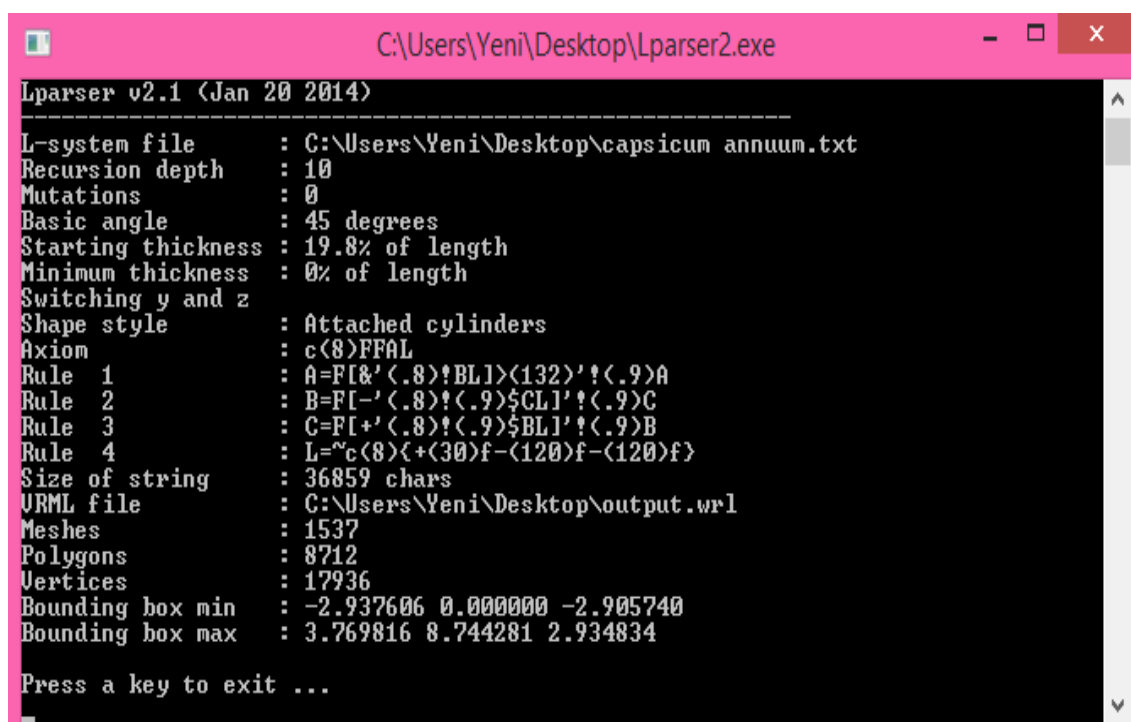
recursion 10
angle 45
thickness 19.8
shape 1
switch_yz 1

axiom c(8)FFAL

rule A = F[&'(.8)!BL]>(132)'!(.9)A
rule B = F[-'(.8)!(.9)$CL]'!(.9)C
rule C = F[+'(.8)!(.9)$BL]'!(.9)B

rule L = ~c(8){+(30)f-(120)f-(120)f}
```

Figura 14. Fichero en formato ASCII con la estructura del Sistema-L. Fuente: Elaboración propia.



```
C:\Users\Yeni\Desktop\Lparser2.exe
Lparser v2.1 (Jan 20 2014)
-----
L-system file      : C:\Users\Yeni\Desktop\capsicum annum.txt
Recursion depth   : 10
Mutations         : 0
Basic angle       : 45 degrees
Starting thickness : 19.8% of length
Minimum thickness : 0% of length
Switching y and z
Shape style       : Attached cylinders
Axiom             : c(8)FFAL
Rule 1            : A=F[&'(.8)!BL]>(132)'!(.9)A
Rule 2            : B=F[-'(.8)!(.9)$CL]'!(.9)C
Rule 3            : C=F[+'(.8)!(.9)$BL]'!(.9)B
Rule 4            : L=~c(8){+(30)f-(120)f-(120)f}
Size of string    : 36859 chars
URML file         : C:\Users\Yeni\Desktop\output.wrl
Meshes            : 1537
Polygons          : 8712
Vertices          : 17936
Bounding box min  : -2.937606 0.000000 -2.905740
Bounding box max  : 3.769816 8.744281 2.934834
Press a key to exit ...
```

Figura 15. Resultado de parsear el fichero en formato ASCII con la estructura del Sistema-L en el Lparser.

Resultados y Discusión



Figura 16: Simulación de la planta obtenida de parsear el fichero con la estructura del Sistema-L en el Lparser con 5 iteraciones.

Resultados y Discusión

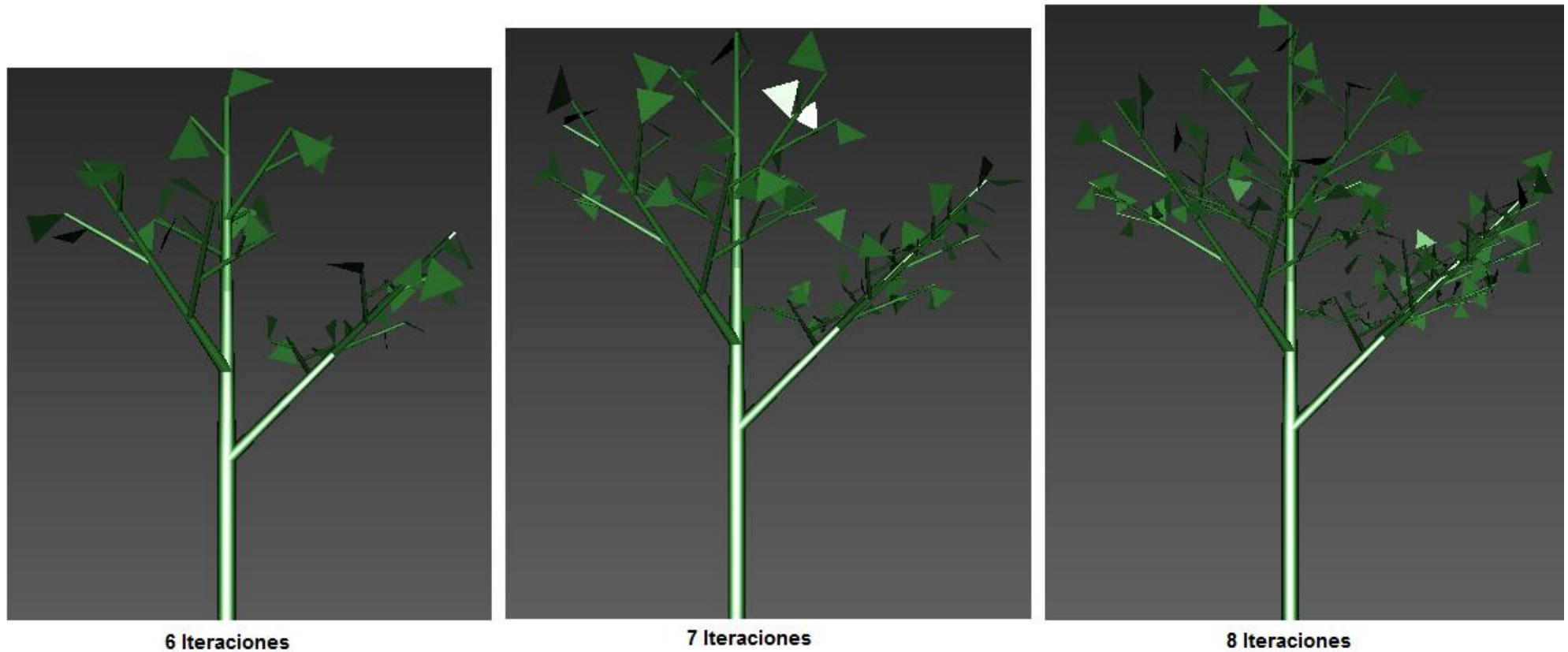
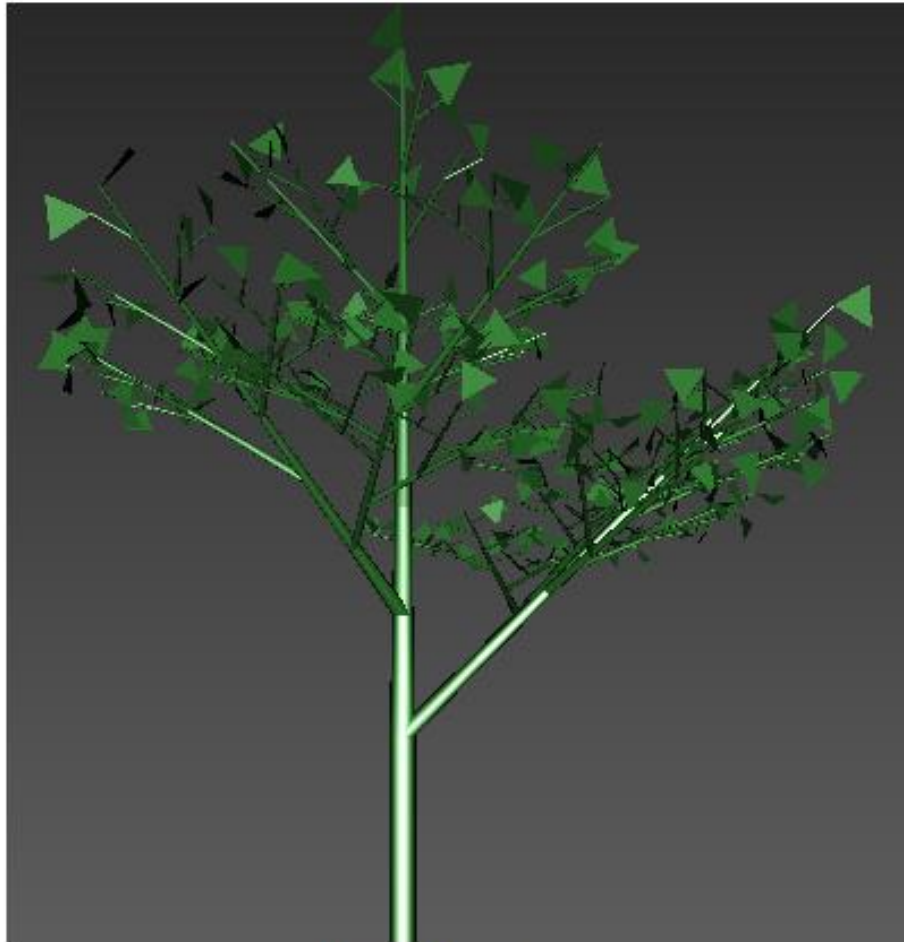
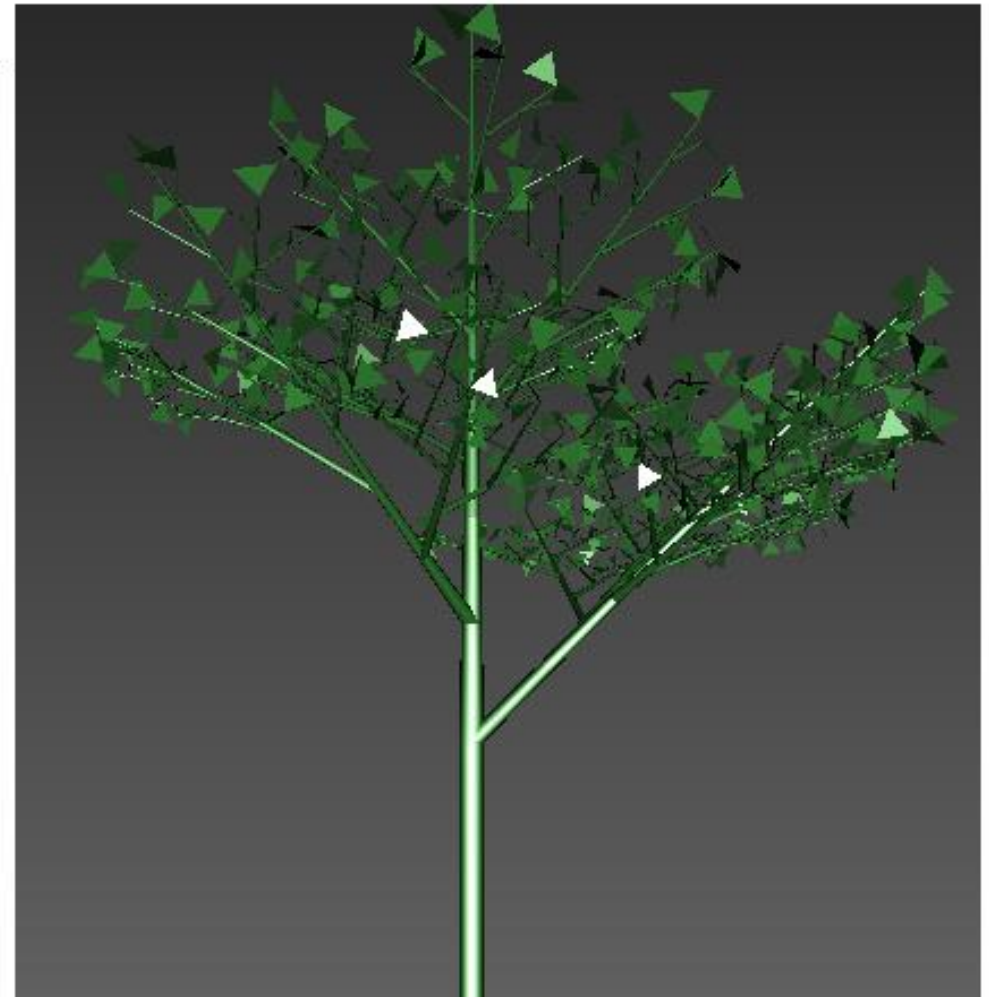


Figura 17: Simulación de la planta obtenida de parsear el fichero con la estructura del Sistema-L en el Lparser con 8 iteraciones.

Resultados y Discusión



9 Iteraciones



10 Iteraciones

Figura 18: Simulación de la planta obtenida de parsear el fichero con la estructura del Sistema-L en el Lparser con 10 iteraciones.

Resultados y Discusión

3.3 Algoritmo del Sistema-L que genera la planta Capsicum Annuum L.

El algoritmo consiste en una microgramática que posee símbolos y reglas de sustitución. A partir de formas simples, se construye una estructura compleja, la cual puede ser interpretada en términos gráficos y representada como la estructura de la planta.

El algoritmo del Sistema-L Capsicum Annuum L. se describe en un lenguaje natural como sigue:

Entrada:

R: Conjunto de reglas, con restricciones y probabilidades asociadas.

Axioma: Cadena de símbolos inicial.

I: Número de iteraciones.

Salida:

C: Cadena generada.

1. $C = \text{Axioma}$
2. Mientras $k = 0$ hasta I :
3. $C' = \text{Cadena vacía.}$
4. Para cada símbolo S de C :
5. $R' = \text{Reglas aplicables de } R \text{ que tienen } S \text{ como parte izquierda.}$
6. Elegir aleatoriamente una regla X de R' teniendo en cuenta las probabilidades asociadas.
7. $C' = C' + \text{Parte derecha de } X$
8. $C = C'$
9. Fin del ciclo
10. Devuelve C
11. Fin del programa

Conclusiones

CONCLUSIONES

Una vez finalizada la investigación es posible arribar a las siguientes conclusiones:

Se realizó un estudio profundo del estado actual de la modelación del crecimiento y desarrollo de plantas, centrando la atención en una de sus principales corrientes: la modelación estructural de plantas y dentro de esta, los Sistemas-L y la teoría de la geometría fractal para la modelación del crecimiento de la planta *Capsicum Annuum* L.; se identificaron los principales métodos para analizar propiedades fractales, definiendo el uso del Método Conteo de Cajas.

Se realizó un análisis fractal a la planta *Capsicum Annuum* L. mediante el método Conteo de Cajas, demostrando la presencia de características fractales en la planta lo cual permitió clasificarla como fractal lineal, autosemejante que presenta autosimilitud estadística, sobre esta información se construyó el modelo que describe el crecimiento de la misma a partir de un Sistema-L con características fractales.

Se diseñó el algoritmo en lenguaje natural que simula el crecimiento de la planta a partir del Sistema-L *Capsicum Annuum* L.

Se validó el modelo propuesto mediante el programa Lparser, que permitió visualizar la simulación de la planta *Capsicum Annuum* L. en diferentes etapas de su crecimiento.

Recomendaciones

RECOMENDACIONES

Se recomienda la aplicación del modelo en el proyecto de robótica que se lleva a cabo en la Universidad Agraria de la Habana para simular la interacción del robot con la planta y de esta forma determinar los parámetros geométricos y cinemáticos del brazo robótico al interactuar con las plantas de *Capsicum Annuum* L. en las casas de cultivos.

Elaborar un sistema en un lenguaje de programación de alto nivel que simule el modelo propuesto del Sistema-L *Capsicum Annuum* L. utilizando los parámetros definidos.

Incorporar al modelo las reacciones estructurales ante el ambiente en aras de lograr un mayor realismo.

Extender el modelo hasta llegar a obtener un modelo funcional-estructural de la planta que incluya fotosíntesis, respiración, movimiento del agua al interior de la planta y fijación del carbono, relacionar el modelo con cambios en el manejo y ambiente, que permita ser utilizado para la toma de decisiones.

Referencias Bibliográficas

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Aldana Alfonso, H. M., 2001. *Enciclopedia Agropecuaria Terranova.* 2da ed. Bogota: s.n.
2. Anon., 2012. *Cortona 3D Viewer (antes Cortona VRML Client) 6.0.* [Online] Available at: <http://www.cortona3d.com/> [Accessed 4 Febrero 2016].
3. Araujo Camacho, E. et al., 2014. *USO DE FERTILIZANTES ORGÁNICOS Y QUÍMICOS EN EL CULTIVO DEL PIMIENTO (CAPSICUM ANNUUM L.),* Matanzas: s.n.
4. Barbosa, J. C., 2009. Modelagem e Modelos Matemáticos. *Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, Volume 2, pp. 69-85.
5. Bernardo , A. & Calderón , C., 2012. *Conceptos básicos del Statgraphics.*, s.l.: s.n.
6. Bounogogne, C. e. d., 2014. *fractalyse. Fractal Analysis Software.* [Online] Available at: https://translate.googleusercontent.com/translate_c?depth=1&hl=es&prev=search&rurl=translate.google.com.cu&sl=en&u=http://www.fractalyse.org/en-docall.html&usq=ALkJrhgJUdNmyoboMNI1n4JkZKUYJwwVlw [Accessed 2 Enero 2016].
7. Bourke, P., 2014. *Box counting fractal dimension of volumetric data.*, s.l.: s.n.
8. Braun, E., 1999. Caos, fractales y cosas raras. Issue 150.
9. Buchnícek, . M., Nezádál , M. & Zmeskal , O., 2000. *Numeric calculation of fractal dimension.* s.l., Nostradamus.
10. Campos Muñoz , D., 2011. *INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DE LINDENMAYER: fractales, autómatas celulares y aplicaciones.*, Puebla: s.n.
11. Cattaneo, C. A. et al., 2009. APLICACIÓN DE DIMENSIÓN FRACTAL AL ESTUDIO DE SISTEMAS NATURALES.. *Mecánica Computacional*, 6 Noviembre, Volume XXVIII, p. 2021.2038.
12. de Reffye, P. et al., 1988. Plant Models Faithful to Botanical Structure and Development. *Computer Graphics*, 22(4), pp. 151-158.
13. del Alamo, F., 2012. *Benoit MandelBrot y los fractales*, s.l.: s.n.
14. Depestre Manso, T., 2009. *Guía técnica para la producción del cultivo de pimiento.* 1ra ed. s.l.:s.n.
15. Falconer, K., 1990. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications.* s.l.:Jonh Wiley and Sons.

Referencias Bibliográficas

16. Fernández Quiroga, M. P., 2005. Estado del arte en modelación funcional-estructural de plantas. *BOSQUE*, 2(26), pp. 71-79.
17. Galeon, F., 2011. *Determining Formalities Of Settlements*, s.l.: s.n.
18. García de Jalón, J., Rodríguez, J. I. & Vidal, J., 2005. *Aprenda Matlab 7.0 como si estuviera en primero.*, Madrid: s.n.
19. García, R., 2011. *Curso básico de: Statgraphics Plus versión 5.1*, s.l.: s.n.
20. Goñi, J. & García, J. M., 2006. *Dinámica de Sistemas Biológicos: modelando complejidad.*, s.l.: s.n.
21. Gutiérrez, J. M., 1998. *SISTEMAS NO LINEALES. CONCEPTOS, ALGORITMOS Y APLICACIONES*, Potosí: s.n.
22. Hein, N. & Bienmbengut, M. S., 2006. Modelaje matemático como método de investigación en clases de matemáticas. *Matemática como lenguaje para interpretar nuestro entorno*.
23. Lahoz Beltra, R., 2004. *BIOINFORMÁTICA, Simulación, vida artificial e inteligencia artificial*. s.l.:s.n.
24. Laorden Fiter, E., 2012. *Descripción, comparación y ejemplos de uso de las funciones de la toolbox de procesamiento digital de imágenes de MATLAB.*, s.l.: s.n.
25. Luna Murillo, R. A. et al., 2015. Efectos de abonos orgánicos en el crecimiento y desarrollo del pimiento (*Capsicum annuum* L.).. *Centro Agrícola*, 18 diciembre, 42(4), pp. 11-18.
26. Majdalawi Álvarez, A. A., 2006. *Fractales*, s.l.: s.n.
27. Mandelbrot, B., 1997. *La geometría fractal de la naturaleza*. Barcelona: s.n.
28. Mandelbrot, B. B., 1975. *Les Objets fractales: Forme, hasard et dimension.*. Paris : Flammarion.
29. Maroto Borrego, J. V., 2000. Horticultura Herbácea Especia. *MUNDIPRENSA*, pp. 23-42.
30. Milán Pertuz, D. C., 2010. *Introducción a los Sistemas L.*. [Online] Available at: www.complexud.com [Accessed 12 Diciembre 2015].
31. Molina, J., 2012. *MANEJO INTEGRAL DE CULTIVOS: N° 2 - Pimiento (Capsicum annuum)* ., s.l.: s.n.
32. Montes, O. et al., 2014. *Evaluación agronómica de la aplicación de cafeína en cultivo de pimiento bajo abrigo en el sureste de España.*. Alemania, s.n.

Referencias Bibliográficas

33. Morales Gusmán, J., 2013. "EVALUACIÓN DE LA PRODUCCIÓN Y CALIDAD DE PIMIENTO (*Capsicum annuum* L.) cv 'Cannon' OBTENIDO MEDIANTE BIOFERTILIZACIÓN", México: s.n.
34. Moreles Vázquez, U. O., 2003. Los fractales. *Suplemento*, Volume 13.
35. Moreno, E., RUSSIÁN L, T. & Ruiz S, C., 2012. Uso de la poda para extender el ciclo productivo del cultivo de pimentón.. *Revista Científica UDO Agrícola*, 12(3), pp. 559-562.
36. Nieto Garibay, A., Troyo Diéguez, E. & Pimienta Barrios, E., 2007. Respuesta de variables morfológicas al déficit hídrico de dos especies de chile (*Capsicum frutescens* L. y *Capsicum annuum* L., Solanaceae).. *scientia-CUCBA*, 29 Junio, 9(1), pp. 1-8.
37. Nuez, F., Gil Ortega, R. & Costa, J., 1996. *El cultivo de pimientos, chiles y ajíes*, España: s.n.
38. Oppenheimer, P. E., 1986. Real Time Design and Animation of Fractal Plants and Trees. *S I G G R A P H*, 20(4), pp. 55-64.
39. Orellana Benavides, F. E. et al., 2000. *Cultivo de chile dulce. Guía técnica*. El Salvador: s.n.
40. Ortega de La Puente, A., 2000. *Equivalencias entre algunos sistemas complejos: Fractales, Autómatas Celulares y Sistemas de Lindenmayer*, s.l.: s.n.
41. Ortega, E., 2013. *Fractales y análisis fractal*, s.l.: s.n.
42. Ortiz Méndez, U. & Hinojosa Rivera, M., 1998. Geometría de Fractales y Autoafinidad en Ciencia de Materiales. *Ingenierías*, Enero-Junio, 1(1), pp. 15-21.
43. Paglini, M., 2001. MANDALAS Y FRACTALES: MORFOLOGÍAS DE LA NATURALEZA. *Arte y Diseño Digital*.
44. Passoni, L. I., 2005. *Modelos en Bioingeniería: Caracterización de imágenes estáticas y dinámicas*. s.l., s.n.
45. Pérez Hernández, M. d. I. S., 2010. *Diseño de servicios web*, s.l.: s.n.
46. Prusinkiewicz, P. & Lindenmayer, A., 2004. *The algorithmic beauty of plants*. s.l.: s.n.
47. Ramírez J, E., 2014. *Despliegue Básico en OpenGL Moderno*, s.l.: s.n.
48. Reséndiz Melgar, R. C. et al., 2010. Variedades de pimiento morrón manejadas con despunte temprano en dos densidades de población. *Chapingo*, Volume 16, pp. 223-229.
49. Rivero García Saavedra, J. A., 2006. *L-Systems con Lparser*. [Online] Available at: <http://www.dmae.upm.es/curs fractales/capitulo2/lparse/filelist.xml> [Accessed 28 Noviembre 2015].

Referencias Bibliográficas

50. Rodríguez Llanes, Y., Depestre Manso, T. L. & Palloix, A., 2014. Comportamiento en campo abierto de nuevos híbridos f1 y variedades de pimiento (*Capsicum annuum* L.) Multirresistentes a virus.. *Cultivos Tropicales*, Junio, 35(2), pp. 51-59.
51. Romero Escobedo, M. B., 2013. *ANÁLISIS DE CRECIMIENTO Y DINÁMICA NUTRIMENTAL DEL CHILE MILAHUATECO (Capsicum Annuum L.)*, México: s.n.
52. Rosas Romero, M. et al., 2014. *Guía técnica para la descripción varietal de chile (Capsicum Annuum L.)*, s.l.: México.
53. Salgado Matías, E., 2012. *Fractales.*, s.l.: s.n.
54. Sandoval , F. A., 2010. *Dimensión topológica y dimensión fractal.*, s.l.: s.n.
55. Santacruz, C. et al., 2007. Fractal Theory Applied to Food Science.. *Encyclopedia of Agricultural, Food, and Biological Engineering.*, pp. 1-13.
56. Soto Ortiz, R., 2008. CROP PHENOLOGY, DRY MATTER PRODUCTION, AND NUTRIENT UPTAKE AND PARTITIONING (*Cucumis melo* L.) AND CHILE (*Capsicum Annuum* L.).
57. Sullivan, D., 1987. *Differentiable structures on fractal like sets, determined by intrinsic scaling functions on dual Cantor sets*, s.l.: s.n.
58. Torres, A. & Loraza, E., 2008. *APLICACIÓN DE FRACTALES EN LA INGENIERÍA AMBIENTAL.*, s.l.: s.n.
59. Valdes Cepeda, R. D. & Olivares Sáenz, E., 1998. GEOMETRIA FRACTAL EN LA CIENCIA DEL SUELO. *Terra*, Septiembre, 16(3), pp. 277-288.
60. Vázquez Casarrubias, G. et al., 2011. Edad al trasplante y su efecto en el crecimiento y rendimiento de chile apaxtleco. *Revista Chapingo. Serie horticultura*, Abril. 17(1).
61. Vivas , N., Martínez , S. & Suárez , S. P., 2005. *MODELACIÓN 2D y 3D DE OBJETOS DE LA NATURALEZA*, s.l.: s.n.
62. Vizcaíno Recio, P., 2012. *SISTEMAS INTELIGENTES PARA MUNDOS VIRTUALES*, s.l.: s.n.

ANEXOS

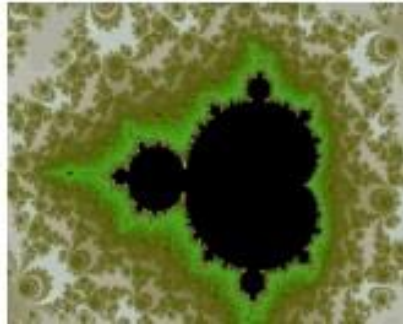


Figura 19a. Conjunto de Mandelbrot. Ejemplo de fractal en tiempo de escape infinito. Fuente: (Vivas et al., 2005).



Figura 19b. Conjunto de Julia. Ejemplo de fractal en tiempo de escape infinito. Fuente: (Vivas et al., 2005).



Figura 20. Fractal de Newton. Ejemplo de fractal en tiempo de escape finito. Fuente: (Vivas et al., 2005).

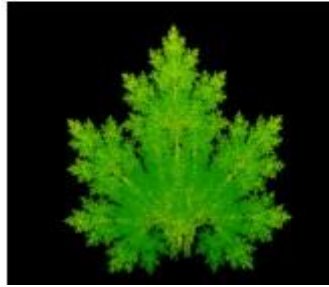


Figura 21. Fractal autosemejante generado por un IFS. Fuente: (Vivas et al., 2005).

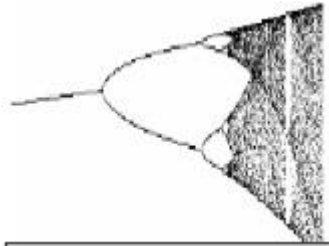


Figura 22. Fractales de bifurcación. Ecuación logística. Fuente: (Vivas et al., 2005).



Figura 23. Atractor de un sistema dinámico. Fuente: (Vivas et al., 2005).

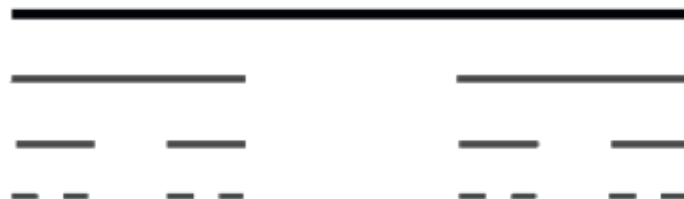


Figura 24. Conjunto de Cantor en 3 iteraciones.



Figura 25. Autosimilitud exacta del copo de nieve de Koch.

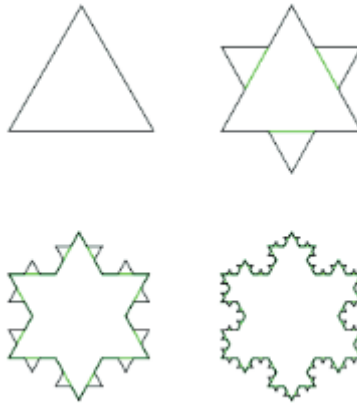


Figura 26. Las primeras tres iteraciones de la curva de Koch.