

UNIVERSIDAD AGRARIA DE LA HABANA
"FRUCTUOSO RODRÍGUEZ PÉREZ"
FACULTAD DE CIENCIAS TÉCNICAS



Alternativa metodológica para introducir ejercicios por niveles de desempeño cognitivo en Matemática I de las carreras agropecuarias.

Autor: Lic. Noslén Rodríguez Álvarez

Tesis presentada en opción del título académico de Master en Biomatemática

Mayabeque, 2016

UNIVERSIDAD AGRARIA DE LA HABANA
"FRUCTUOSO RODRÍGUEZ PÉREZ"
FACULTAD DE CIENCIAS TÉCNICAS



Una alternativa metodológica para introducir ejercicios por niveles de desempeño cognitivo en Matemática I de las carreras agropecuarias.

Autor: Lic. Noslén Rodríguez Álvarez

Tutores: MSc. Vilma Toledo Dieppa

MSc. Yolanda Sabín Rendón

Tesis presentada en opción del título académico de Master en Biomatemática

Mayabeque, 2016

Agradecimientos:

Principalmente a mis tutoras por aceptar el reto de guiarme en esta investigación y a las cuales le estaré eternamente agradecido.

A Hilba por su ayuda incondicional en cada momento.

A los que de manera entusiasta colaboraron con la entrevista y la encuesta.

A mi equipo: Maikel, Yoandry, Zulema y demás compañeros de la maestría por los momentos de apoyo y ánimo que compartimos.

A mi papá, ojalá hubiese podido estar a mi lado.

A mi mamá, a mi hermano por su apoyo en cada momento de mi vida.

A mí querida esposa que siempre estuvo a mi lado, con el consejo y el empuje
preciso.

RESUMEN

En este trabajo se presenta una alternativa metodológica para la introducción de los ejercicios por niveles de desempeño cognitivo en las carreras agropecuarias y un conjunto de ejercicios bajo estas condiciones, con base en el estudio de los referentes teóricos acerca de los niveles de desempeño cognitivo y de las tendencias en Cuba y el resto del mundo en el tratamiento de ejercicios y problemas. Se realizó un diagnóstico inicial en la Provincia Mayabeque, donde se tabularon y analizaron los resultados de los exámenes de ingreso a la educación superior en el período del 2013 al 2015, así como los resultados de los exámenes de Matemática I en las carreras agropecuarias de la Universidad Agraria de la Habana en el pasado curso 2014 - 2015. Esto permitió detectar las dificultades de los estudiantes de ambas enseñanzas en la aplicación de la herramienta trigonométrica. Se aplicó entrevista y encuesta a un grupo de profesores de las enseñanzas media superior y superior, cuyos resultados fueron utilizados para elaborar la propuesta final de ejercicios trigonométricos por niveles de desempeño cognitivo, para el desarrollo de habilidades en Matemática I en las carreras agropecuarias.

Índice	Pág.
INTRODUCCIÓN	1
Capítulo 1. Referentes teóricos que caracterizan los niveles de desempeño cognitivo y las tendencias más actuales para el tratamiento de ejercicios y problemas.....	8
1.1 El Proceso Pedagógico Profesional.....	8
1.2 Fundamentos teóricos que sustentan el desarrollo de habilidades en Matemática.	11
1.3 Enfoque Histórico Cultural de L. S. Vygotsky para el desarrollo de habilidades.	15
1.4 Tratamiento y caracterización de los ejercicios y problemas en la asignatura Matemática.	17
1.4.1 Estrategias en la resolución de ejercicios y problemas.	25
1.5 Niveles de desempeño cognitivo.....	31
1.5.1 Niveles de asimilación y desempeño cognitivo en la Matemática.....	32
Capítulo 2: Fundamentos metodológicos de la investigación.....	36
2.1 Desarrollo histórico de la trigonometría y su importancia en carreras agropecuarias.....	36
2.2 Métodos de investigación utilizados.	40
2.3 Aspectos de interés sobre el tipo de investigación. Metodología aplicada.	43
2.4 Resultados del muestreo a los exámenes de ingreso a la educación superior y los exámenes de Matemática I.....	45
2.5 Resultados obtenidos en la entrevista a profesores.	48
Capítulo 3: Propuesta de ejercicios trigonométricos por niveles de desempeño cognitivo	53
3.1 Propuesta de ejercicios de trigonometría por niveles de desempeño cognitivo.....	53
3.1.1 Caracterización de los ejercicios por niveles de desempeño cognitivo	53
3.2 Evaluación de los ejercicios con aplicaciones trigonométricas por niveles de desempeño cognitivo	65
CONCLUSIONES	69
RECOMENDACIONES	70

Referencias Bibliográficas.

Anexos.

INTRODUCCIÓN

En el año 2011 el estado cubano con vista al Sexto Congreso del Partido aprobó el 18 de abril los Lineamientos de la Política Económica y Social del Partido y la Revolución. En este documento se desglosan los aspectos relacionados con la educación, (Lineamientos 145, 146, 147, 150, 151, 152 y 153) enfocados a continuar avanzando en la elevación de la calidad y el rigor del proceso docente educativo.

En este proceso, la enseñanza de la Matemática ha desempeñado un papel fundamental ya que como ciencia ha repercutido en la vida de los hombres, por las posibilidades que brindan sus contenidos, al desarrollo del pensamiento lógico y al planteamiento y resolución de problemas.

Los contenidos matemáticos constituyen un recurso necesario para el sistema de conocimientos y habilidades que será aplicado posteriormente en las asignaturas de los currículos de las diferentes carreras agropecuarias: Agronomía, Ingeniería Agrícola e Ingeniería en Procesos Agroindustriales. En el caso particular de las mismas, la trigonometría es básica en asignaturas específicas tal como Termotecnia, Máquinas Agrícolas I y II, Procesos Tecnológicos Agropecuarios I y II, entre otras.

El proceso de enseñanza – aprendizaje de la matemática en niveles precedentes se ha mantenido en constante renovación, influyendo el tratamiento que se ha realizado en la resolución de ejercicios.

En los años 80 comenzó un fuerte movimiento en todo el mundo, que tuvo como objetivo darle a la solución de ejercicios y dentro de estos a los problemas el lugar que le corresponde dentro de la enseñanza, sobre todo de la Matemática. De ahí en lo adelante muchos han sido los trabajos que se han realizado acerca del tema, destacándose: Jungk (1981), Kilpatric (1985), Contreras (1987), Labarrere (1987), Arango y Ballester (1995), Mónaco y Aguirre (1995), Santos (1996), Campistrous y Rizo (1996, 1998), Cervera (1998) así como Ballester et al., (2000).

El análisis de los niveles de desempeño cognitivo es otro aspecto que ha sido analizado tanto a nivel nacional como internacional, materializándose a través de: Picazo (2004) quien realiza una evaluación de las habilidades cognitivas en la resolución de problemas matemáticos, Algarín y Leal (2013) presenta una caracterización de los niveles de razonamiento en los procesos de descripción, definición y demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas. En Cuba la labor se ejemplifica en los profesores: Rubio et al., (2006), Triana et al., (2006), Puig (2009) y López (2010) quienes tratan los niveles de desempeño cognitivo en la escuela contemporánea mediante la implementación de propuestas para evaluar los mismos.

En la educación superior varias han sido las investigaciones que han tratado el tema de enseñanza y aprendizaje de la matemática, por ejemplo: Cantoral (1993) que basa su ponencia en identificar la forma en como el conocimiento de las dificultades que los estudiantes muestran al estudiar calculo resulta útil para el diseño de situaciones didácticas que puedan, eventualmente, llevarse a cabo en los distintos sistemas escolares. Riviére (1999), Godino (2002), Martín y Zavala (2006), así como Lacueva (2008) realizan un análisis de las dificultades del aprendizaje de las matemáticas desde una perspectiva cognitiva.

Cantoral y Farfán (2003) destacan que las últimas investigaciones se han centrado en la problemática que se ocupan de la matemática relevante en la enseñanza superior, olvidando un hecho fundamental que caracteriza al sistema didáctico de la educación superior, la matemática escolar está al servicio de otros dominios científicos.

“La enseñanza en general y de las matemáticas en particular son asuntos de la mayor importancia para la sociedad contemporánea (...) ayudando a reconocer la necesidad de implementar modificaciones educativas en el campo particular de la matemática con base a diseños mejor adaptados a las prácticas escolares”. (Cantoral y Farfán, 2003, p.27)

Artigue (2003) expone cronológicamente las deficiencias detectadas en el estudio del cálculo diferencial e integral en Europa, Azcárate y Camacho (2003) hacen una breve exposición de las principales características del llamado pensamiento matemático avanzado, Aristimuño (2004) propone un proceso de la enseñanza y aprendizaje de la matemática a nivel superior a través de las competencias, Osorio (2005) establece un análisis del conocimiento matemático en la educación superior basado en un estudio socioepistemológico de la integral, mientras que Sánchez y García (2008) identifican las líneas de investigación necesarias para aumentar la comprensión de cómo los estudiantes usan el concepto de derivada.

Moreno, (2008), realiza una reflexión acerca de la situación de la enseñanza del cálculo en la universidad, y defiende la necesidad e importancia de las investigaciones didácticas en el ámbito del conocimiento del profesor, como motor del proceso de enseñanza y aprendizaje.

Por otra parte Retana (2013) explica acerca del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en general y del cálculo, en particular, el cual presenta una de las mayores dificultades para los estudiantes de nivel universitario, incluidos los estudiantes de las carreras de Ingeniería, concluyendo que se hace necesario que los docentes en cálculo reflexionen sobre las características propias de lo que se entiende por Ingeniería para procurar poner el cálculo al servicio de esta, ya que el papel que desempeña es determinante.

En la Universidad Agraria de La Habana se han realizado estudios en la carrera Ingeniería Agrícola que arrojan bajos resultados sobre todo en las Matemáticas I y II, donde la calidad de las notas es baja oscilando entre los 2 y 3 puntos (Anexo 1 y 2) lo que puede estar propiciado por:

- Los deficientes hábitos de estudio;
- La falta de motivación por la carrera que estudia;
- La poca apropiación del contenido;

- Las habilidades deficientes en la resolución tanto de ejercicios como problemas.

Las profesoras Toledo y Sabín (2014) realizaron un estudio en la carrera Ingeniería Agrícola en la UNAH, acerca de los resultados de calidad de la Disciplina Matemática durante los cursos académicos desde 2007 – 2008 hasta 2013 – 2014, en la que se incluye la Matemática I la que arrojó como consecuencia que esta asignatura es la de más bajos resultados docentes y de calidad, provocados entre otros por la deserción al no poder vencer los contenidos por deficientes conocimientos y habilidades. Esta situación ha sido estudiada también por otros autores; Posada (2008) y Lorenzo et al. (2010) quienes realizan un análisis en las universidades de Honduras y Pinar del Río respectivamente, catalogando de alarmante en ambos casos el abandono de la carrera por los estudiantes de primer año.

Como se aprecia en la revisión bibliográfica realizada se ha encontrado que el tratamiento de los ejercicios y problemas se realiza atendiendo a la clasificación según el criterio de diversos autores, anteriormente mencionados, incluso basados en los niveles de desempeño cognitivo, pero poco se ha trabajado en la educación superior con dichos niveles y al ser la trigonometría un tema recurrente no solo dentro de la matemática sino como se explicó en párrafos anteriores por su aplicación en las carreras agropecuarias se tiene como **Problema Científico**:

¿Cómo se pueden utilizar los niveles de desempeño cognitivo a través de ejercicios para contribuir al desarrollo de habilidades trigonométricas en Matemática I en estudiantes de carreras agropecuarias?

Objeto de acción: Desarrollo de habilidades trigonométricas en el proceso de enseñanza – aprendizaje de la Matemática I.

Objetivo:

- Diseñar una alternativa metodológica a través de una propuesta de ejercicios por niveles de desempeño cognitivo para contribuir al desarrollo de habilidades trigonométricas en Matemática I para estudiantes de primer año de carreras agropecuarias.

Para alcanzar el objetivo propuesto se plantean las siguientes

Preguntas Científicas:

1. ¿Cuáles son los elementos teóricos que caracterizan los niveles de desempeño cognitivo y las tendencias más actuales para el tratamiento de ejercicios y problemas?
2. ¿Cuál es el estado actual de las habilidades trigonométricas en los estudiantes de primer año de las carreras agropecuarias en la UNAH?
3. ¿Qué ejercicios por niveles de desempeño cognitivo se deben proponer para contribuir al desarrollo de habilidades trigonométricas en los estudiantes de primer año de las carreras agropecuarias en la UNAH?

Para alcanzar el objetivo propuesto planteamos las siguientes **Tareas de Investigación:**

1. Sistematización de los referentes teóricos y metodológicos existentes en la literatura que caractericen los niveles de desempeño cognitivo y las tendencias más actuales para el tratamiento de ejercicios y problemas.
2. Diagnóstico del estado actual del desarrollo de habilidades trigonométricas en los estudiantes del primer año de las carreras agropecuarias.
3. Elaboración de la propuesta de ejercicios de trigonometría por niveles de desempeño cognitivo para estudiantes de primer año de las carreras agropecuarias.

Significación práctica: Una propuesta de ejercicios por niveles de desempeño cognitivo para contribuir al desarrollo de habilidades trigonométricas en la asignatura Matemática I para estudiantes de primer año de carreras agropecuarias, se puede valorar la propuesta, con fines de su adopción y generalización en la Disciplina Matemática, con las adaptaciones propias de su situación específica

Novedad: Consiste en el diseño de una alternativa metodológica a través de ejercicios por niveles de desempeño cognitivo que contribuye al desarrollo de habilidades trigonométricas en Matemática I para estudiantes de primer año de carreras agropecuarias lo cual constituye un camino inexplorado en esta enseñanza y una novedad de carácter teórico – metodológico.

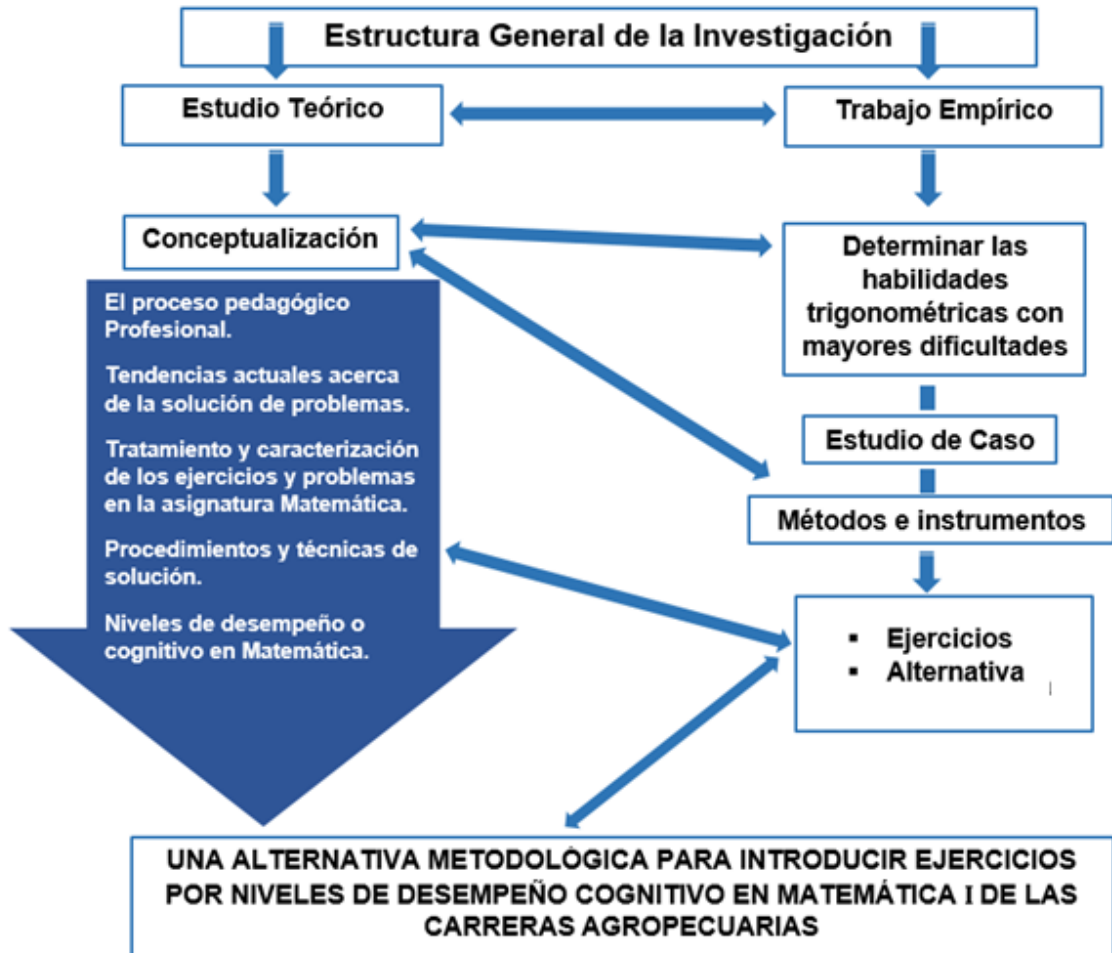
La tesis consta de introducción, tres capítulos, las conclusiones y recomendaciones, la bibliografía y anexos que brindan información complementaria y la comprensión de la investigación realizada.

El capítulo 1 comprende la sustentación teórica de la investigación a partir del análisis de tratamiento de ejercicios y problemas en la asignatura matemática en la educación cubana y a nivel internacional en los contenidos referentes a la trigonometría y el estudio de los referentes teóricos sobre los niveles de desempeño cognitivo.

El capítulo 2 contiene el diagnóstico del estado actual del desarrollo de habilidades trigonométricas en los estudiantes del primer año de las carreras agropecuarias, así como los métodos empleados en el desarrollo de la investigación.

En el capítulo 3 se realiza un análisis de la propuesta de los ejercicios por niveles de desempeño cognitivo que contribuyen al desarrollo de habilidades trigonométricas en los estudiantes del primer año de las carreras agropecuarias.

Resumen de la estrategia general seguida en la investigación.



Capítulo 1. Referentes teóricos que caracterizan los niveles de desempeño cognitivo y las tendencias más actuales para el tratamiento de ejercicios y problemas.

En este capítulo se establecen los referentes teóricos que sustentan la investigación. El mismo se estructura en cinco epígrafes. En el primero se caracteriza el proceso pedagógico profesional y su estructura en los planes de estudio de la enseñanza universitaria. En el segundo se detallan los conceptos más importantes sobre el desarrollo de habilidades con énfasis en la matemática. En el tercero se analiza el Enfoque histórico Cultural de Vygotsky, como teoría que sustenta el desarrollo del proceso de enseñanza – aprendizaje en esta investigación. El epígrafe cuatro aborda lo relativo a los ejercicios y problemas (conceptos, clasificación, estrategias de trabajo) útiles para la elaboración de los ejercicios de trigonometría que constituyen la alternativa didáctica de la investigación. El quinto epígrafe está dedicado al estudio teórico de los niveles de desempeño cognitivo, que permiten dosificar los ejercicios de trigonometría elaborados.

1.1 El Proceso Pedagógico Profesional

Para orientar correctamente el proceso de formación de profesionales existe el proceso profesional.

El proceso profesional según se establece por la Oficina Nacional de Normalización en las normas ISO 9000, se define como el conjunto de recursos y actividades interrelacionadas que transforman los elementos de entrada y salida, para el caso de la enseñanza universitaria serían estos el ingreso y el egreso

A partir de estos elementos se podría definir al proceso profesional como el conjunto de pasos lógicamente articulados y regulados que se dan con el fin de resolver problemas presentes al ejercer la profesión en diferentes tipos de actividades como respuesta a una demanda social y que requiere el uso de recursos.

Dentro del conjunto de procesos profesionales se encuentra el proceso pedagógico profesional el cual tiene características comunes a los otros y específicas a él.

Abreu, (1993, p. 5) define que el proceso pedagógico profesional es:

“... el proceso de educación como respuesta a una demanda social, que tiene lugar bajo las condiciones de una institución docente y la empresa para la formación y superación de un profesional competente. La institución docente en donde se desarrolla al más alto nivel es la universidad (...).”

Los documentos estatales que caracterizan el plan de estudio de una carrera universitaria y que son elaborados centralmente por las Comisiones Nacionales de Carreras son los siguientes:

- El Modelo del Profesional (documento principal del plan de estudio);
- Plan del Proceso Docente (refleja el contenido fundamental de la carrera y su organización durante los años de estudio previstos);
- Los programas de las disciplinas (documento que contiene las características más importantes de la misma, y contiene los objetivos generales a lograr y los contenidos esenciales a asimilar).

En el nivel universitario los planes de estudio se estructuran horizontalmente por año académico y verticalmente por disciplinas. Estas se clasifican en básicas, básicas específicas y del ejercicio de la profesión, distribuidas a través de los currículos base, propio y optativo/ electivo.

El perfeccionamiento continuo de estos planes y programas de estudio, ha sido para el Ministerio de Educación Superior (MES) una de sus principales tareas, demostrando así la forma en que las universidades han comprendido la pertinencia de la educación superior, que ha adquirido nuevas y urgentes dimensiones debido, fundamentalmente, al avance impetuoso que tiene en estos tiempos la ciencia y la tecnología.

Por otra parte, la labor de perfeccionamiento de los planes actuales vigentes que realizan las universidades, a partir de un trabajo metodológico colectivo a nivel de carrera, disciplina y año, que se ha caracterizado por su nivel científico, profesional y muy vinculado a las necesidades territoriales, alertan sobre la necesidad de constantes cambios para la formación de los profesionales.

Conocer las deficiencias o logros que ha tenido una disciplina que pertenece al currículo de una carrera, así como identificar algunas de las variables que incidan en ello, es una necesidad para el perfeccionamiento del proceso de enseñanza aprendizaje a este nivel.

En el estudio realizado a los programas de la Disciplina matemática para las carreras agropecuarias se plantea como problema más general ¿Cómo aplicar racionalmente los métodos que contribuyen al desarrollo del pensamiento lógico, así como las herramientas matemáticas y de cómputo para evaluar la información, procesarla y establecer criterios de valor científico?, y como objetivo más general: Aplicar los procedimientos y técnicas de manejo, procesamiento y análisis de la información en los procesos y sistemas relacionados con las especialidades agropecuarias, desarrollando el pensamiento lógico.

En dicho documento aparecen entre otros elementos los contenidos de la disciplina compuestos por el sistema de conocimientos y el sistema de habilidades. Para poder desarrollar estos sistemas de habilidades propuestos en la disciplina y sobre todo en la matemática de primer año se precisa de sólidos conocimientos para aplicar en la resolución de ejercicios y problemas.

El propio estudio permitió establecer las regularidades para los objetivos generales instructivos de la disciplina matemática para las carreras agropecuarias:

- Disciplinar el pensamiento lógico, acrecentando la capacidad de razonamiento, análisis y síntesis en la resolución de problemas relacionados con su perfil profesional empleando los principios económicos y administrativos para el

desarrollo de los sistemas de ingeniería en los procesos tecnológicos y biotecnológicos de la producción agropecuaria sostenible.

- Resolver de manera independiente, creadora y con alto nivel científico técnico los problemas actuales básicos, más comunes, cotidianos de la profesión, a través del cálculo matemático.

Para alcanzar estos objetivos los estudiantes precisan de una formación matemática básica que no se adquiere en el nivel superior, sino transitando de forma gradual por los diferentes niveles de enseñanza donde se apropian de conocimientos habilidades de la asignatura tanto en la resolución de ejercicios y problemas dentro de la matemática, como la aplicación de esta en situaciones propias de otras disciplinas.

Una organización adecuada del contenido que conduzca al logro de los objetivos requiere de un trabajo con ejercicios correctamente organizados, ya que los ejercicios matemáticos resumen las exigencias que deben plantearse a los alumnos, de modo que su personalidad se desarrolle en la dirección adecuada.

Una buena parte del tiempo de la enseñanza de la matemática se dedica a la resolución de ejercicios y de este modo la falta de eficiencia en la utilización de ese tiempo repercute negativamente en la formación de los alumnos.

Si se pretende elevar la eficiencia de la enseñanza de la Matemática es necesario perfeccionar el sistema de ejercicios que forma parte del curso de matemática y la metodología adecuada para el trabajo con los mismos.

1.2 Fundamentos teóricos que sustentan el desarrollo de habilidades en Matemática.

Petrovsky, (1978, p.8) reconoce por habilidad "...el dominio de un sistema de actividades psíquicas y prácticas, necesarias para la regulación consciente de la actividad, de los conocimientos y hábitos."

Brito (1987, p.23) plantea que “...las habilidades constituyen el dominio de acciones (psíquicas y prácticas) que permiten una regulación racional de la actividad con ayuda de los conocimientos y hábitos que el sujeto posee.”

Para López (1990, p.17) la habilidad:

“... constituye un sistema complejo de operaciones necesarias para la regulación de la actividad (...) se debe garantizar que los alumnos asimilen las formas de elaboración, los modos de actuar, las técnicas para aprender, las formas de razonar, de modo que con el conocimiento se logre también la formación y desarrollo de las habilidades.”

Por su parte al referirse a las habilidades Álvarez de Zayas (1999, p.20) expresa:

Definimos “...la habilidad como la dimensión del contenido que muestra el comportamiento del hombre en una rama del saber propio de la cultura de la humanidad. Es desde el punto de vista psicológico, el sistema de acciones y operaciones dominadas por el sujeto que responde a un objetivo”.

Teniendo en cuenta algunas consideraciones pedagógicas, el investigador de este material docente concuerda con López (1990) cuando plantea los modos de actuar, las técnicas para aprender, las formas de razonar, de modo que con el conocimiento se logre también la formación y desarrollo de las habilidades, mediante las técnicas didácticas bien estructuradas.

Es importante precisar dos etapas en la adquisición de una habilidad, según propone López (1990):

1. Formación de la habilidad: Es la etapa que comprende la adquisición consciente de los modos de actuar, cuando bajo la dirección del profesor el estudiante recibe la orientación adecuada sobre la forma de proceder. Esta etapa es fundamental para garantizar la correcta formación de la habilidad.
2. Desarrollo de la habilidad: Es cuando una vez adquiridos los modos de acción, se inicia el proceso de ejercitación, es decir, de uso de la habilidad recién formada en la cantidad necesaria y con una frecuencia adecuada, de modo que vaya haciéndose

cada vez más fácil de reproducir o usar, y se eliminan los errores. Cuando se garantiza la suficiente ejercitación decimos que la habilidad se desarrolla; son indicadores de un buen desarrollo: la rapidez y corrección con que la acción se ejecute.

Durante la etapa de formación de la habilidad todo el sistema de operaciones que ella comprende es dirigido en forma consciente para garantizar la corrección en la ejecución, así como el orden adecuado de esas operaciones. Una vez iniciada la ejercitación, la repetición del sistema de operaciones va determinando la automatización de muchos de sus componentes, cada una de ellas se ejecuta con más seguridad, la dirección consciente es cada vez menor, desaparecen los movimientos innecesarios, se gana en precisión, en fin, se logra el desarrollo.

Son requerimientos en esta etapa de desarrollo de la habilidad el saber precisar cuántas veces, cada cuanto tiempo, y algo muy importante de qué forma. La ejercitación necesita además de ser suficiente, el ser diversificada, es decir la presentación de los ejercicios variados para evitar el mecanicismo, el formalismo, las respuestas por asociación con algunas palabras de la orden o de la forma en que el ejercicio se presenta. Estos errores anulan el aprendizaje, “eliminan” el pensamiento, la reflexión, la conducta inteligente.

Las habilidades se denominan generales o específicas, según sean parte del contenido de todas las asignaturas o solo de alguna en particular

Entre las habilidades generales es importante destacar las de carácter intelectual y entre ellas las que favorecen el desarrollo de operaciones del pensamiento por la importancia para la formación del hombre que necesita nuestra sociedad, así como las denominadas docentes y que son las que caracterizan al buen estudiante, las que determinan en gran medida la calidad de la actividad cognoscitiva, de la actividad docente de los educandos.

El autor considera, finalmente, que las habilidades que se presentan en este trabajo docente, se clasifican como habilidad específica, pues se trabaja en ejercicios de trigonometría por niveles de desempeño cognitivo.

Krutetskii (1969, p.20) define las habilidades matemáticas como:

“aquellas que pueden ser categorizadas en un sistema estructurado que tiene elementos en el rango desde lo más general a lo más especializado. Por habilidad matemática todo rasgo individual psicológico de una persona que conducen al dominio exitoso de una actividad matemática.”

Según Geissler (1979, p.13) se entiende por habilidad matemática... “aquellos componentes automatizados que surgen en el desarrollo de acciones con contenidos preferentemente matemáticas y finalmente contribuyen decisivamente, mediante su aplicación al nivel del poder en matemática...”

El aspirante coincide con Krutetskii (1969) cuando plantea que la habilidad matemática tiene elementos en el rango desde lo más general a lo más especializado teniendo en cuenta la habilidad matemática es una habilidad específica, pero es aplicable a cualquier ciencia.

En el sistema de habilidades matemáticas se consideran tres componentes fundamentales: los conocimientos matemáticos, el sistema de operaciones de carácter matemático y las operaciones lógicas.

El dominio de una habilidad implica el dominio de cada uno de estos elementos, lo que indica que para desarrollar una habilidad matemática no es suficiente la repetición de la parte práctica de la acción, sino también la parte que corresponde al pensamiento teórico.

El profesor debe hacer que el estudiante sea capaz de identificar las características y propiedades esenciales de los conocimientos que le sirven de base, comprender la orientación necesaria para realizar la acción y también poseer conocimientos y operaciones lógicas que enlazan la acción con los conocimientos y su ejecución.

En el proceso de desarrollo de habilidades, no interesa sólo el resultado, sino cómo se obtiene este de una forma consciente, la metacognición.

1.3 Enfoque Histórico Cultural de L. S. Vygotsky para el desarrollo de habilidades.

El Enfoque Histórico Cultural de Vygotsky, (1979) supera el interés mantenido en teorías anteriores por la esfera cognitiva del hombre.

González (1999), plantea que el aprendizaje es concebido como una actividad social de producción y reproducción del conocimiento bajo condiciones de orientación e interacción social; como el tránsito de lo externo a lo interno, de la regulación externa a la autorregulación, de la dependencia a la independencia cognoscitiva

Para la enseñanza seguir esta concepción implica poner en el centro de la atención pedagógica al aprendizaje; asegurar las condiciones para que el estudiante se desarrolle mediante la colaboración, partiendo de lo que no puede hacer solo hasta llegar a un dominio independiente; atender no sólo el aspecto cognitivo sino también los distintos aspectos de la personalidad del estudiante de manera integral.

Vygotsky (1979) introdujo el concepto de actividad social (la que enlaza con los procesos intersíquicos) a partir de la cual se deriva la actividad individual (la que vincula a los procesos intrapsíquicos) El tránsito de la actividad social a la individual propicia el proceso de interiorización.

Este proceso incluye una serie de operaciones:

“Una operación que inicialmente representa una actividad externa se reconstruye y comienza a suceder internamente. Un proceso interpersonal queda transformado en otro intrapersonal. La transformación de un proceso interpersonal en un proceso intrapersonal es el resultado de una serie de procesos evolutivos.” Vygotsky, (1979, p.30).

Por tanto, en su concepción, el entorno social es una parte intrínseca del aprendizaje y del desarrollo individual y no sólo una condición que puede o no favorecerlo. Como

el desarrollo humano va de lo externo, social e ínter subjetivo, hacia lo interno, individual e intrasubjetivo, el proceso de comunicación entre las personas se constituye en un aspecto esencial para el aprendizaje, para el acto de enseñar, en fin, para la labor cotidiana del profesor y del estudiante.

Para Vygotsky (1979) el desarrollo mental se manifiesta en dos niveles: el nivel evolutivo no real, que se establece como resultado de los ciclos evolutivos llevados a cabo y por tanto define los productos finales del desarrollo, las funciones que ya han madurado en el individuo; y el nivel de desarrollo potencial. La diferencia entre estos dos niveles es lo que denominó zona de desarrollo próximo la cual “no es otra cosa que la distancia entre el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz” (Vygotsky, 1979). Este segundo nivel define funciones que todavía no han madurado pero que se encuentran en proceso de maduración. Es por ello que cuando un estudiante efectúa una operación o muestra alguna adquisición en el proceso de su aprendizaje independiente, se puede afirmar que tan sólo ha comenzado el desarrollo de las funciones correspondientes.

Como se puede entender, el concepto de Zona de desarrollo próximo tiene un importante valor teórico, metodológico, diagnóstico y pronóstico para la comprensión del desarrollo psíquico y para el proceso de enseñanza aprendizaje; ya Vygotsky reconocía que una educación desarrolladora es aquella que conduce al desarrollo, que va delante del mismo - guiando, orientando, estimulando que tiene en cuenta el desarrollo actual para ampliar continuamente los límites de la zona de desarrollo próximo o potencial, y por lo tanto, los progresivos niveles de desarrollo del sujeto.

Para Vygotsky (1979) la pedagogía no debía orientarse hacia el ayer sino hacia el mañana del desarrollo psíquico. Para él, aprendizaje y desarrollo no eran equivalentes, defendía que el aprendizaje organizado propiciaría el desarrollo mental

y pondría en marcha una serie de procesos evolutivos. La enseñanza correctamente organizada conduciría tras de sí al desarrollo mental.

El Enfoque Histórico Cultural reconoce también el carácter integral del psiquismo humano, defiende que en toda función o proceso psíquico se manifiesta la unidad o integración entre lo cognitivo, lo afectivo y lo regulado.

El autor está de acuerdo con Vygotsky, pues la educación desarrolladora es aquella que conduce al desarrollo, para lograr todos estos objetivos es necesario que el profesor busque los medios necesarios que faciliten su labor en la formación del educando, el maestro debe ser creativo, buscar las necesidades del grupo de estudio guiando, orientando, estimulando, teniendo en cuenta el desarrollo actual para ampliar continuamente los límites de la zona de desarrollo próximo o potencial y haga su clase más asequible en la adquisición de los conocimientos de acorde con los objetivos de la educación universitaria, pues logra un estudiante con más confianza en sí mismo, con un papel más activo en el medio y una interrelación más positiva con los demás que garantiza un comportamiento en correspondencia con las exigencias que la sociedad le plantea y a la vez propicia un carácter activo en la preparación del futuro profesional como condición esencial para alcanzar las metas de esta educación.

1.4 Tratamiento y caracterización de los ejercicios y problemas en la asignatura Matemática.

Para la caracterización de los ejercicios en Matemática es necesaria la clasificación dada por Jungk (1981) cuando plantea:

“Como concepto superior se elige el concepto ejercicios matemáticos planteados a los alumnos. Como conceptos subordinados aparecen ejercicios de aplicación y ejercicios contruidos (...) tales ejercicios pueden subdividirse nuevamente en dos grupos: ejercicios formales y ejercicios con texto. Estos últimos pueden clasificarse nuevamente en ejercicios

con textos matemáticos y ejercicios con textos relacionados con la práctica”. (Jungk, 1981, p 109)

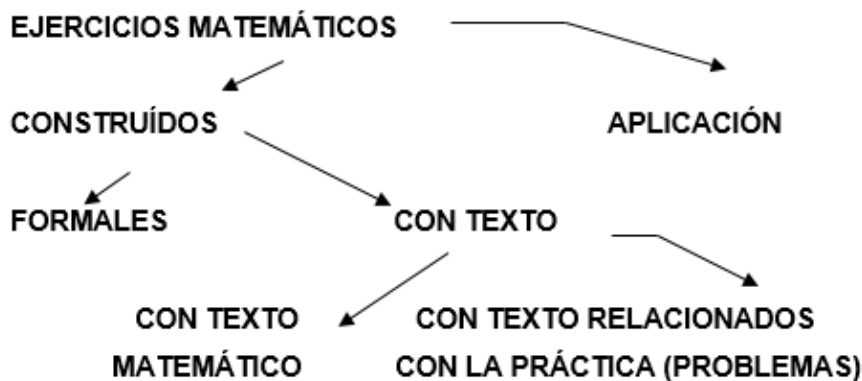


Figura 1: Pirámide de clasificación de los ejercicios.

Fuente: Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática. (Jungk, 1981, p.110).

“Se debe señalar que las fronteras entre los distintos grupos son móviles, poco precisas. Este es el caso entre los ejercicios con textos relacionados con la práctica y los ejercicios de aplicación. Ambos designan tipos de ejercicios en los que un problema matemático no desempeña un papel de primer lugar. También entre los ejercicios con textos matemáticos y los ejercicios con textos relacionados con la práctica existen fronteras móviles, porque muchos de los ejercicios con textos matemáticos son ciertas “formas preliminares” de ejercicios con textos relacionados con la práctica.” (Jungk 1981, p.110)

Ballester et al. (2000) defiende la idea de que existen diferentes criterios del concepto de ejercicio. La mayoría de los autores lo definen como una exigencia para la realización de acciones, soluciones de situaciones deducción de relaciones, cálculo, entre otros y hace referencia al concepto de ejercicio planteado por Müller (1987) el cual entiende como ejercicio en la enseñanza de la Matemática una exigencia para actuar que se caracteriza por:

1. El objetivo de las acciones;

2. El contenido de las acciones;
3. Las condiciones de las acciones.

El objetivo de todas las acciones en la resolución de un ejercicio es en cada caso transformar una situación inicial (elementos dados, premisas) en una situación final (elementos que se buscan, tesis)

El contenido de las acciones en la resolución de un ejercicio es caracterizarlo de una parte por el objeto de las acciones y por otra por cierto tipo de acciones

Entre los tipos de acciones son de importancia especial las siguientes: identificar, realizar, comparar, ordenar, clasificar, reconocer, describir, aplicar, fundamentar, buscar, planificar y controlar

“Estas definiciones tienen puntos de contacto cuando se destaca que un ejercicio es una exigencia para actuar y en todas se plantea la existencia de una situación inicial, una vía de solución y una situación final. En nuestro criterio estos elementos precisan las características esenciales de los ejercicios en la enseñanza de la Matemática”. (Peña, 2001, p.9)

“La situación puede ser tomada de la práctica para el caso de los llamados ejercicios de aplicación o elaborados a partir de la práctica y los dominios de la ciencia en el caso de los llamados ejercicios con textos. En ambos casos nos referimos a problemas”. (Ballester et al., 2000, p. 407).

En la selección de los ejercicios, la dificultad y el trabajo a realizar por parte de los estudiantes con los mismos es de vital importancia para el desarrollo de la clase de matemática elaborada por el profesor.

Arango y Ballester (1995), destacan que: el grado de dificultad está en relación directa con el planteamiento a los alumnos de ejercicios en que se presenten todas las dificultades posibles, incluyendo la presentación de ejercicios con una, ninguna o más de una solución. En la selección de los ejercicios hay que tener en cuenta:

- 1) Las habilidades o hábitos fundamentales a desarrollar.
- 2) La actividad mental que deben desarrollar los alumnos en el proceso de solución teniendo en cuenta:
 - El grado de dificultad.
 - El grado de complejidad.
 - El grado de actualización.

El objetivo de todas las acciones en la resolución de un ejercicio, es en cada caso transformar, una situación inicial (elementos dados, premisas) en una situación final (elementos que se buscan, tesis).

Dentro de la clasificación de los ejercicios propuesta por Jungk (1981), y analizada anteriormente, aparecen los problemas.

Al analizar los conceptos de problema dados por varios autores es necesario resaltar la estrecha relación que existe entre dicho concepto y la definición de ejercicio matemático, al contrario de la concepción que tienen muchos profesores con relación a que el término problema solo es empleado con los ejercicios con textos relacionados con la práctica.

“Por lo que puede deducirse que en la enseñanza media de Cuba se trabaja la Matemática, sin tener en cuenta los planteamientos más avanzados de esta ciencia respecto al concepto de problema y, por ende, tampoco se tienen en cuenta las opiniones de varios investigadores en el campo, respecto a cómo utilizar los problemas en el trabajo diario del aula para un adecuado desarrollo del pensamiento lógico de los estudiantes”. (Toledo, 2003, p.24)

“La misma tarea puede ser para una persona que conoce el algoritmo, un ejercicio y para una persona que no conoce el algoritmo puede ser un problema en el sentido amplio. Los límites entre ejercicio y problema en el sentido amplio fluctúan en el proceso de solución. Este proceso está condicionado por la casualidad, primeramente, esta forma de solución se reducirá poco a poco. Al mismo tiempo se construye un proceso que está caracterizado por

un algoritmo de solución y que será aplicado cada vez más, por la mayoría de los alumnos en el transcurso del proceso de solución". (Jungk, 1981, p. 111)

Según los criterios de Campistrous y Rizo (1998), se registran cuatro tendencias de la llamada enseñanza por problema. Las tendencias son las siguientes:

- Enseñanza problémica.
- La enseñanza por problemas.
- La enseñanza basada en problemas.
- La enseñanza de la resolución de problemas.

A continuación, se explican las que con mayor fuerza se han estado manifestando en Cuba, estas son:

Enseñanza problémica: consiste en problematizar el contenido de enseñanza, de tal forma que la adquisición del conocimiento se convierte en la resolución de un problema en el curso de la cual se elaboran los conceptos, algoritmos o procedimientos requeridos. Está muy elaborada desde el punto de vista didáctico y tiene un cuerpo categorial muy estructurado. En esta forma de enseñanza poco se deja a la improvisación.

La enseñanza de la resolución de problemas que es una tarea urgente, independientemente de las anteriores y que en rigor debe precederlas. Esta es una de las formas que adopta el *Problem Solving* en los Estados Unidos y se ha definido mucho mediante los textos que enuncian y practican "estrategias" para resolver problemas y después plantean problemas para aplicarlas.

El trabajo en la resolución de problemas tiene que transitar por los diferentes niveles de enseñanza, donde los estudiantes aumentan progresivamente sus habilidades matemáticas hasta finalmente incursionar en los problemas propios de la educación superior. En el texto Programas Educación Preuniversitaria Ministerio de Educación (MINED, 2009) se establece que el estudiante debe ser capaz de:

1. Demostrar una concepción científica del mundo y una cultura político – ideológica a través del modo en que se argumentan los contenidos matemáticos.
2. Adoptar decisiones responsables en su vida personal, familiar y social, sobre la base de la comprensión de las necesidades vitales del país, la aplicación de procesos de pensamiento, técnicas y estrategias de trabajo, y de utilización de conceptos, relaciones y procedimientos de la estadística descriptiva, la aritmética, el álgebra, la geometría y la trigonometría.
3. Formular y resolver problemas relacionados con el desarrollo político, económico y social, local, nacional, regional y mundial, y con fenómenos y procesos científicos –ambientales, que requieran transferir conocimientos y habilidades aritméticas, algebraicas, geométricas y trigonométricas a diferentes contextos y promuevan el desarrollo de la imaginación, de modos de la actividad mental, de sentimientos y actitudes, le permitan ser útiles a la sociedad y asumir conductas revolucionarias y responsables ante la vida.
4. Desarrollar hábitos de estudio y técnicas para la adquisición independiente de nuevos conocimientos y la racionalización del trabajo mental.
5. Exponer sus argumentaciones de forma precisa, coherente, racional y convincente, a partir de dominio de la simbología y terminología matemática, como base para su mejor desenvolvimiento en todos los ámbitos de la vida futura.

Sin lugar a dudas los estudiantes que no adquirieron las habilidades en la resolución de ejercicios y problemas en la enseñanza preuniversitaria de una forma óptima se ven en desventaja respecto a sus compañeros de aula.

A continuación, se realiza un análisis del concepto de problema tratado por varios autores:

Para Polya (1962) citado en Santos (1996), tener un problema significa, buscar conscientemente con alguna acción apropiada para lograr una meta clara y concebida pero no inmediata de alcanzar.

En esta definición ya se destacan aspectos esenciales según Santos (1996) como son:

- Estar consciente de la dificultad presentada.
- Tener deseos de resolverla.
- La ausencia de existencia de un camino inmediato para resolverlo.

Kilpatrick (1985) citado en Cervera (1998), sugiere que la forma en que un problema es enunciado también influye en su significado. En un sentido general un problema matemático se identifica como una tarea que requiere conocimientos matemáticos para resolverla y para la cual ni existe un camino directo o inmediato para obtener su solución o soluciones.

Aquí se le otorga significación al enunciado, a la manera que se enfoca el problema y destaca los conocimientos matemáticos para dar solución al mismo.

En las siguientes definiciones según la consideración del autor de esta tesis se da una idea más elaborada sobre la concepción de problema, donde ya se infiere que para su solución se hace necesario el empleo de procedimientos nada rutinarios.

“Un problema no es un recurso mediante el cual pretendemos una automatización rutinaria de un procedimiento, ni la asimilación de determinados algoritmos por repetidas aplicaciones mecánicas de estos. Todo esto se podría calificar como ejercicio, existe problema cuando dicha situación no le es familiar al alumno”. (Contreras, 1987 citado en Mónaco y Aguirre 1995).

“Un problema es determinada situación en la cual existen nexos, relaciones, cualidades, de y entre los objetos que no son accesibles directa e inmediatamente a la persona”, o sea,

“una situación en la que hay algo oculto para el sujeto, que este se esfuerza por hallar”.
(Labarrere, 1987, p.45)

“Un problema es un ejercicio que refleja, determinadas situaciones a través de elementos y situaciones del dominio de las ciencias o de la práctica, en el lenguaje común y exige de medios matemáticos para su solución, se caracteriza por tener una situación inicial (elementos dados, datos) conocida y una situación final (incógnita, elementos buscados) desconocida, mientras que su vía de solución también desconocida se obtiene con ayuda de procedimientos heurísticos”. (Ballester et al., 2000.p.407)

Al analizar los conceptos anteriores se puede obtener varios puntos en común dados por los autores que nos preparan para poder identificar cuando estamos en presencia de un problema:

- Se tiene un planteamiento inicial.
- Se tiene una o varias exigencias.
- Se exigen medios matemáticos para poder transformarlos.
- Se tiene una situación final desconocida.
- Para realizar su solución es necesario la aplicación de procederes heurísticos.

En esta tesis se asumirá el concepto tratado por (Campistrous y Rizo, 1996) debido a que en su simplicidad están intrínsecos todos los aspectos tratados por los autores antes analizados.

“Toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo. La vía para pasar de la situación o planteamiento inicial a la nueva situación exigida, tiene que ser desconocida; cuando es conocida deja de ser un problema”.
(Campistrous y Rizo, 1996, p.12)

1.4.1 Estrategias en la resolución de ejercicios y problemas.

“La captación del hombre para la solución de problemas es un punto muy discutido en el mundo pues se considera una actividad de gran importancia en la enseñanza; ésta caracteriza a una de las conductas más inteligentes del hombre y que más utilidad práctica tiene, ya que la vida misma obliga a resolver problemas continuamente” (Campistrous y Rizo, 2002, p IX).

La resolución de problemas es un tema ampliamente abordado en la actualidad principalmente en la enseñanza preuniversitaria. En la revisión bibliográfica realizada se encontraron varios materiales que fueron de importante apoyo para el desarrollo de esta investigación, Llivina (1999), Vicente (2000), Pérez (2009), Benítez (2012) quienes presentan alternativas metodológicas para el desarrollo de la enseñanza – aprendizaje en la resolución de problemas y el trabajo de Peña (2001), que presenta una la introducción de los ejercicios de nuevo tipo en la enseñanza de la matemática.

En el estudio de los referentes teóricos sobre las estrategias en la resolución de ejercicios y problemas se destacan los criterios de varios autores:

Polya (1976), realiza un análisis sobre las estrategias de resolución de problemas y propone unos pasos para la resolución de los mismos.

- 1) Comprender el problema (identificar el objetivo)
- 2) Traza un Plan (una estrategia de trabajo)
- 3) Llevar a cabo el Plan
- 4) Mirar hacia atrás (comprobaciones finales)

El proceder que describe George Polya, constituye tanto para el profesor como para el alumno un instrumento general de dirección de la resolución de ejercicios y sobre todo de problemas.

Jungk, (1981, p 111) presenta el tratamiento de problemas y aclara determinados procesos parciales validos también en la solución de ejercicios de construcción o en la demostración de teoremas.

1. Orientación hacia el problema.
2. Trabajo en el problema.
3. Solución del problema.
4. Evaluación de la solución y de la vía.

Por otra parte, en los trabajos de Schöenfeld (1985) los cuales han influido grandemente en la resolución de problemas, su aporte más significativo es que a partir de las ideas de Polya, las desarrolla y considera cuatro dimensiones que influyen en el proceso de resolver problemas:

- Dominio del conocimiento o recursos: Representan un inventario de lo que un individuo sabe y de las formas en que adquiere ese conocimiento. Aquí incluye, entre otras cosas, los conocimientos informales e intuitivos de la disciplina en cuestión, hechos y definiciones, los procedimientos rutinarios, y otros recursos útiles para la solución.
- Los métodos heurísticos: En esta dimensión se ubican las estrategias generales que pueden ser útiles en la resolución de un problema, como, por ejemplo, las aisladas por Polya, (1962)
- Las estrategias metacognitivas: o el monitoreo o autoevaluación del proceso utilizado al resolver un problema.
- El sistema de creencias: en la cual se ubica la concepción que tenga el individuo acerca de las matemáticas. Según Schöenfeld, (1985) las creencias establecen el contexto dentro del cual funcionan las restantes tres dimensiones.

Según Ballester et al, (2000) se asevera que: El análisis del ejercicio crea las condiciones previas esenciales para la búsqueda de la idea de solución en la cual se aprecian dos momentos dedicados a:

- a) La reflexión sobre los métodos, donde se determina la vía principal de solución a través del establecimiento de relaciones entre los datos y las incógnitas, este es, generalmente, el planteamiento de una ecuación o la aplicación de una fórmula y la introducción en caso necesario de magnitudes auxiliares.
- b) La elaboración de un plan de solución, donde están presentes las determinaciones de los medios matemáticos concretos y la aplicación de las estrategias de trabajo.
- c) Solución del problema: esta fase incluye la realización del plan de solución y la representación de la solución.

Al respecto Ballester et al. (2000) plantea que en la realización del plan de solución están presentes: la determinación del orden de realización de los cálculos, el análisis de realización del cálculo aproximado, análisis de las unidades de medida, la utilización de magnitudes auxiliares.

El contenido de las acciones en la resolución de un ejercicio está caracterizado por:

- a) Objeto de las acciones que pueden estar dados por los elementos de la materia matemática (conceptos, proposiciones y procedimientos algorítmicos); la correspondencia entre situaciones extramatemáticas y elementos de materia matemáticos; y los procedimientos heurísticos (principios, estrategias, reglas), así como medios heurísticos auxiliares.
- b) Tipos de acciones: identificar, realizar, comparar, ordenar, clasificar, reconocer, describir, aplicar, fundamentar, buscar, planificar, controlar.

En el tratamiento de ejercicios, el profesor debe tener claro los conceptos, teoremas y procedimientos de solución (algorítmicos y heurísticos) que se aplican en la solución de los problemas, como un elemento importante para su solución, estrictamente unido a su nivel de dificultad. Así como la integración de conocimientos previos para la resolución de nuevas situaciones problemáticas mediante razonamiento analógico.

La integración supone la asociación y la constitución pues se pasa a una nueva relación de ideas o fenómenos, donde las añadiduras y nexos unen elementos para formar un todo. Se establece entre los fenómenos si existen vínculos o nexos que estén en el grado de unidad y en el grado de dependencia y es que viene determinada por las relaciones de cohesión, coherencia y adecuación que deben tener los contenidos (López, 2010.)

Los procedimientos de solución en la enseñanza se pueden clasificar en dos grandes clases: los algorítmicos y los heurísticos. Según Ballester et al., (2000, p. 224)

“Ambos tienen en común que se aplican en la solución de ejercicios y problemas de diversos tipos. Su diferencia esencial consiste en que: si para una determinada clase de ejercicio se conoce un algoritmo de solución, entonces todo ejercicio de esta clase se puede resolver con seguridad, en la misma forma, mediante la aplicación de dicho algoritmo, en cambio sí para un ejercicio no se dispone de ningún algoritmo de solución (porque no existe o no se conoce), entonces primero hay que determinar una vía de solución apropiada. Para ello pueden ser útil los procedimientos heurísticos que permiten realizar un trabajo sistemático orientado hacia este objetivo, pero sin que sea posible asegurar que de ese modo se encuentre una vía de solución”.

Otro de los criterios planteados por Ballester et al., (2000), se refiere a que los procedimientos heurísticos apoyan la realización consciente de las actividades mentales complejas y existentes y que estos pueden dividirse en principios, reglas y estrategias, los cuales pueden ser generales y especiales. Agrega además que

permiten la búsqueda de nuevos conocimientos destacándose para ello la analogía, la reducción y la inducción.

El razonamiento analógico se considera un aspecto crítico para la comprensión del pensamiento humano y la resolución de problemas Polya, (1977).

Sobre la importancia en la resolución de problemas del pensamiento análogo Ceacero y González (2013.p 97) exponen que:

“El razonamiento análogo como proceso para la solución de problemas se considera un procedimiento cognitivo que se aplica a dominios de conocimientos poco familiares o desconocidos basándose en situaciones previas conocidas (...) los principales estudios experimentales y planteamientos teóricos indican que los procesos básicos que subyacen al razonamiento analógico son, en primer lugar, el acceso y recuperación en la memoria a largo plazo del problema análogo previo que pertenece al dominio familiar y, posteriormente , la extrapolación de relaciones desde ese dominio familiar al dominio objetivo, existiendo también como procesos colaterales la producción de reglas y representaciones más generales ”.

Las estrategias heurísticas: se comportan como recursos organizativos del proceso de resolución, que contribuyen especialmente a determinar la vía de solución del problema abordado. Existen dos estrategias:

- El trabajo hacia adelante: se parte de lo dado para realizar las reflexiones que han de conducir a la solución del problema: hipótesis.
- El trabajo hacia atrás: se examina primeramente lo que se busca y, apoyándose en los conocimientos que se tienen, se analizan posibles resultados intermedios de lo que se puede deducir lo buscado, hasta llegar a los dados.

Dichas estrategias heurísticas se ponen de manifiesto en el tratamiento actual que se realiza en la resolución de problemas trigonométricos, como prueba de esto se tienen las sugerencias dadas por Andreescu (2005) quien hizo las funciones de

gerente en las Competencias de Matemáticas Americanas (MAA) (1998-2003), en el texto sobre trabajo con ejercicios para el entrenamiento del equipo de USA a la Olimpiada Internacional de Matemática donde propone consejos a seguir para la resolución de los mismos:

- Tomarse su tiempo para la resolución de ejercicios, buscando conexiones entre el ejercicio propuesto y los resueltos anteriormente.
- Experimentar en los primeros ejercicios el trabajo hacia atrás del resultado deseado.
- Para los ejercicios de mayor complejidad destaque los conceptos claves y realice consulta a libros especializados.

La revista mexicana Matemáticas para todos (2015, p.1), realiza una sugerencia de cómo se debe proceder en la realización de ejercicios.

1. *“No debemos abrumarnos con los números, fórmulas y sus elementos matemáticos, siempre los podremos entender al tener en consideración estos elementos:*
2. *Calma. No hay prisa, tome todo el tiempo que necesite para entender o resolver los problemas.*
3. *Reflexión. Siempre debemos preguntarnos el porqué de lo que se plantea. Si esto no se hace, la lógica natural del hombre no será satisfecha y por ello será difícil que entendamos.*
4. *Orden. Seguir secuencias que podamos repasar de manera sencilla; nos ayudará a entender mejor lo que hicimos y con ello podremos revisarlo las veces que sea necesario.*
5. *Practicar, practicar y practicar. Esto no como mera repetición, sino como experimentación. Con ello obtendremos nuevas experiencias y así construiremos nuevos conocimientos. Es como entrenar para una competencia: entre más practiquemos, mejor resolveremos los retos que se nos presenten”.*

Es importante según la opinión del autor de esta tesis, diferenciar como estos dos procedimientos puestos a consideración para ejemplificar el trabajo con ejercicios varían según la complejidad de los mismos, el primero dado como consejo a estudiantes de alto rendimiento en matemáticas y el segundo caso sugerencias dadas a los estudiante que se inician en la matemática. A continuación, se aborda el procedimiento que se utiliza en nuestro país para el trabajo con ejercicios y problemas en las aulas.

En el XIII Seminario Nacional para Educadores del curso 2013 - 2014 (MINED, 2013) se llevó a cabo un análisis de cómo debe realizarse el tratamiento en la enseñanza media de la clase donde lo principal es la resolución de ejercicios y problemas por parte de los estudiantes.

“La enseñanza de la Matemática debe preparar a los estudiantes para trabajar de manera racional, planificada y orientada hacia el cumplimiento de los objetivos de los programas. Ella tiene como objetivo, fijar conceptos teoremas, procedimientos y habilidades tales como: definir, construir, calcular, demostrar, etc., además de métodos de trabajo, de pensamiento y formas de conducción y convicciones.

¿Cuáles son las formas que se emplean para fijar conceptos teoremas, procedimientos y habilidades?

La ejercitación, el repaso, la sistematización y la profundización.

La efectividad de las diversas formas de fijación, para el logro de la asimilación de los contenidos por parte de los estudiantes, está dada en la correcta selección de los ejercicios que se proponen en el sistema de clases, que permiten el desarrollo de las habilidades para alcanzar el objetivo y utilizar los métodos adecuados que dirigen la actividad mental de los estudiantes en la solución de las tareas planteadas”. (Acosta, 2013. p 18)

1.5 Niveles de desempeño cognitivo.

Rubio et al. (2006), plantea que por cognición se entiende el mecanismo de conocer, entonces la actividad cognoscitiva constituye la acción o el conjunto de acciones que

se realizan en aras de conocer un objeto, fenómeno o aspecto. La actividad cognoscitiva tiene como resultado la asimilación del conocimiento y las posibilidades de aplicarlo a las más diversas situaciones, por consiguiente, la asimilación puede ser analizada como proceso y como resultado. El proceso coincide con el desarrollo de la actividad cognoscitiva; por su parte cuando se analiza la asimilación, como resultado, se hace referencia al volumen y cantidad de conocimientos, así como al grado de desarrollo de las habilidades y hábitos que los escolares demuestran haber adquirido en la actividad.

1.5.1 Niveles de asimilación y desempeño cognitivo en la Matemática.

“En el proceso de enseñanza existen dos fuerzas de distinta índole; una de ellas es la necesaria y rigurosa dirección por el profesor y la otra es la actividad de los alumnos. (...) la unidad de la instrucción y de la educación en el proceso de enseñanza es otra característica de su esencia (...), los conocimientos no existen por sí mismos, sino en una dirección partidista e ideológica que modela la conducta de los alumnos (...), la unidad de la instrucción y la educación exige que el profesor utilice las potencialidades educativas del contenido de la enseñanza”. (Labarreda y Valdivia, 2009, p 25)

Referente a los niveles de asimilación del contenido López (2010), resalta la orientación como parte de la actividad cognoscitiva de los escolares, destacando dos variantes, dos formas de iniciar la búsqueda, de solucionar una tarea planteada:

- En primer caso se trata de una búsqueda por ensayos y errores, ciega poco económica en tiempo y que no deja mucha experiencia. Es posible que ante una situación similar cometa errores semejantes.
- En segundo caso se trata de una búsqueda siguiendo una orientación dada que antecede a la ejecución y que hace que esta sea más eficiente, más rápida y que, al propio tiempo deja una experiencia de cómo proceder en situaciones semejantes.

Demostrando que es necesario partir de los niveles de asimilación para el análisis de los niveles de desempeño cognitivo.

Puig (2009, p.9) toma en consideración los siguientes niveles de asimilación:

- *Nivel de familiarización: cuando se logra describir e identificar el objeto de estudio observado y mencionar sus objetivos.*
- *Nivel de reproducción: cuando se logra una ejecución repetitiva de la habilidad imitando o no por referencia, pero siempre en condiciones invariables.*
- *Nivel de aplicación: cuando se logra una adecuada ejecución automatizada, estereotipada de la habilidad, en la solución intelectual o práctica en condiciones variables provocadas por situaciones no previstas.*
- *Nivel de creación: cuando se cumplen las mismas exigencias anteriores, pero con la diferencia de que las soluciones dadas no fueron enseñadas ni ensayadas antes, sino que han surgido totalmente nuevas derivadas del cúmulo de conocimiento adquirido.*

Es necesario destacar la importancia de alcanzar el nivel de creación en el proceso de asimilación de los educandos, al respecto Ballester et al., (2000, p.410) argumentan:

” Cuando el alumno es capaz de construir problemas se encuentra en un nivel superior en los niveles del conocimiento contribuyendo con ello al pensamiento del desarrollo creativo y con fantasía, pensamiento lógico, así como a la formación lingüística, transfiriendo las formulaciones del lenguaje común al de la asignatura y viceversa”.

Los niveles de desempeño, nos permiten delimitar diferentes jerarquías para la resolución de ejercicios y problemas, posibilitando la correlación de los diferentes niveles para activar un proceso cognoscitivo diferenciador, flexible y diverso.

Puig, (2009, p 11 -13) asevera que:

“Cuando se habla de desempeño cognitivo se está haciendo referencia a la manifestación del cumplimiento de lo que una persona debe hacer en un área del saber de acuerdo con las

exigencias establecidas para ello, en correspondencia con el nivel de desarrollo de asimilación de los conocimientos (...). Cuando se trata de evaluar con objetividad y justeza los niveles de desempeño cognitivo de los estudiantes es necesario tener en cuenta cuatro criterios esenciales íntimamente relacionados: con la magnitud de los logros del aprendizaje alcanzados por un número superior a la media del grupo en una asignatura determinada, los niveles de asimilación adquirido, el grado de complejidad con que se quiere medir este desempeño cognitivo en correspondencia con lo anterior y las características del contexto en que explora el desempeño del alumno.

- Primer nivel: Capacidad del alumno para utilizar las operaciones de carácter instrumental básicas de una asignatura dada, para ello deberá, reconocer, identificar, descubrir e interpretar los conceptos y propiedades esenciales en lo que esta se sustenta.*
- Segundo nivel: Capacidad del alumno de establecer relaciones conceptuales donde además de reconocer, descubrir e interpretar los conceptos deberá aplicarlos a una situación planteada y reflexionar sobre sus relaciones internas.*
- Tercer nivel: Capacidad del alumno para resolver problemas, por lo que deberá reconocer y contextualizar la situación problémica, identificar componentes e interrelaciones, establecer las estrategias de solución, fundamentar o justificar lo realizado.*

Que el alumno se enfrente a la resolución o generación de problemas es también de relevancia social, por su aporte para el buen desempeño de los alumnos en la vida”.

El autor de esta tesis asume el criterio dado por Puig (2009) sobre los niveles de desempeño cognitivo, pues la ubicación de un ejercicio dentro de los niveles de desempeño cognitivo no depende del contenido en sí, sino del tratamiento que se haga dentro del ejercicio de dicho contenido. Por lo cual cualquier contenido puede transitar por ejercicios de los tres niveles si se reajusta el mismo a los niveles de desempeño cognitivo.

Lograr en los estudiantes el nivel III de desempeño cognitivo o por lo menos un buen alcance del nivel II con tendencia al nivel III, debe ser la meta del proceso de

enseñanza – aprendizaje. El trabajo con los niveles de desempeño posibilita dinamizar el control de todo el proceso y comparar los resultados en su relación con el problema, los objetivos, el contenido, los métodos y los medios. De igual modo al insertarse en un proceso esencialmente bilateral (aprendizaje- enseñanza) los niveles de desempeño cognitivo de los alumnos permiten establecer una correlación causal con el nivel de desempeño profesional del docente y facilitan consecuentemente, atribuir las causas de los éxitos y fracasos del proceso docente de forma bilateral y democrática, tanto en alumnos como profesores, al ser los actores fundamentales del proceso de enseñanza - aprendizaje.

Después de realizar un estudio de los referentes teóricos se definieron las bases teóricas sobre la que se sustenta la investigación. Además, se pueden apreciar las posibilidades que presenta los niveles de desempeño cognitivo descritos y asumidos para la elaboración de ejercicios en matemática.

Capítulo 2: Fundamentos metodológicos de la investigación.

El presente capítulo se estructura en cinco epígrafes. En el primero de ellos se explica la selección del tema de trigonometría para la elaboración de los ejercicios por niveles de desempeño cognitivo. En el segundo epígrafe se describen los métodos utilizados en el orden teórico, empírico y matemático estadístico. El epígrafe tres caracteriza el tipo de investigación desarrollada y describe la metodología utilizada. En el epígrafe cuatro se exponen las principales dificultades de los estudiantes en los exámenes de ingreso a la educación superior, así como en las evaluaciones finales de los estudiantes de primer año de las carreras agropecuarias. Mientras que en el último epígrafe se recogen los criterios empíricos brindados por un grupo de profesores sobre la utilización de los niveles de desempeño cognitivo en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática y sus opiniones sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la trigonometría en particular.

2.1 Desarrollo histórico de la trigonometría y su importancia en carreras agropecuarias.

Dentro de la Matemática la trigonometría desempeña un papel importante, en el desarrollo intelectual del hombre y ha estado presente en numerosos resultados científicos desde los comienzos de las civilizaciones

La apropiación de estos contenidos ofrece un desarrollo de la comprensión no solo de ejercicios y problemas propiamente matemáticos, sino de aplicaciones físicas y situaciones diarias. También hay que tener en cuenta que la Trigonometría tiene una transcendencia en aquellos que optan por carreras de ciencias donde una buena base de conocimientos trigonométricos ayuda a una mejor y rápida comprensión de ejercicios de límite, continuidad, derivadas, optimización, Series de Fourier, métodos de integración por sustitución trigonométrica entre otras.

El desarrollo de la trigonometría en Cuba está estrechamente vinculado con el triunfo de la Revolución en 1959, aunque en la primera mitad del siglo XIX se dan los primeros pasos.

“Por ejemplo, encontramos que, en el 1835, en el Colegio de San Cristóbal, se enseñaba Álgebra elemental y superior, Geometría, Trigonometría y Geodesia, Aplicaciones del Álgebra a la Geometría y Cálculo Diferencial e Integral. (...) En 1873 toma posesión como presidente de la Facultad de Filosofía Letras y Ciencias el insigne científico Felipe Poey y Aloy (1799-1891); enseguida se realizan importantes reformas institucionales, entre ellas, la cátedra de Matemática se divide en dos: la cátedra A de Álgebra Superior, donde ya se incluían rudimentos del Análisis Infinitesimal, y la cátedra B de Geometría y Trigonometría”. (Sánchez y Valdés, 2006, p.18)

Durante la década del 70 del pasado siglo, se introduce en la enseñanza media el plan alemán donde la trigonometría es objeto de estudio en décimo grado, realizándose en oncenso un estudio con mayor profundidad

En la actualidad, después de numerosas transformaciones a los planes de estudio de la enseñanza preuniversitaria la trigonometría, continúa abordándose en los grados décimo y oncenso. Entre los objetivos declarados para este tema se encuentran los siguientes:

- Cálculo de razones trigonométricas en triángulos rectángulos de ángulos cualesquiera en el sistema sexagesimal y circular de medida de ángulos, aplicando sus definiciones, las relaciones fundamentales entre ellas, el conocimiento de las razones trigonométricas de los ángulos notables y axiales, las fórmulas de reducción, las tablas trigonométricas y las reglas de cálculo aproximado.
- Demostrar identidades y ecuaciones trigonométricas aplicando lo aprendido sobre la generalización del concepto de ángulo para calcular razones trigonométricas de ángulos cualesquiera y otros recursos algebraicos y

trigonométricos como las identidades trigonométricas fundamentales, las fórmulas de adición y del ángulo duplo.

- Describir e interpretar situaciones de la realidad utilizando los recursos de las funciones trigonométricas $y=\text{sen}x$, $y=\text{cos}x$, $y=\text{tan}x$, $y=\text{cot}x$, de sus propiedades a su representación analítica, grafica o descriptiva (en el lenguaje común) y viceversa, aplicando estos conocimientos a situaciones sencillas de la práctica y otras ciencias. Resolver problemas y ejercicios de aplicación a la geometría plana, otras ciencias o al cálculo de cuerpos, aplicando teoremas sobre la resolución de triángulos cualesquiera, en particular, la ley de los senos y los cosenos.

Estas habilidades deben ser de dominio de los estudiantes de preuniversitario, para la realización de los exámenes de ingreso a la Educación Superior y para la aplicación de los mismos en las asignaturas de matemática de las carreras que lo requieran, como es el caso de las agropecuarias y en asignaturas específicas del perfil profesional.

En la actualidad el tratamiento de la trigonometría que es abordado en los textos básicos de la enseñanza media-superior no contienen ejercicios que integren los conocimientos necesarios para la adecuada profundización de estos contenidos, y son los profesores en su praxis teniendo en cuenta lo que ven que se aplica en exámenes de ingreso y en los exámenes de fin de curso elaborados por la Dirección Provincial de Educación (DPE), quienes elaboran ejercicios, que en ocasiones rayan en lo reproductivo.

La experiencia de los docentes y la ausencia de los ejercicios con las características descritas en el párrafo anterior, contribuyen a que los resultados alcanzados en las evaluaciones finales de Décimo, Onceno y de Duodécimo grado, en exámenes de ingreso a la Educación Superior donde los estudiantes tienen que resolver este tipo de ejercicio sean desfavorables. Autores nacionales e internacionales se han

preocupado por la confección de ejercicios que integren contenidos en la enseñanza media-superior entre los que se destacan (Hernández, 1998; Naredo 2013).

Otro autor cubano (Reyes, 2012) realiza una propuesta de ejercicios de trigonometría para la unidad 4 de décimo grado, incluido en el plan de estudio de preuniversitario de ese año. Esta propuesta se realiza con el objetivo de mejorar la resolución de ejercicios geométricos, y se desarrolla en el tema "Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo y sus aplicaciones".

La resolución de ejercicios y problemas ha sido siempre un aspecto de interés en la enseñanza de la Matemática en todos los sistemas de enseñanza, dentro y fuera de Cuba. Por tal motivo se han confeccionado disímiles libros y folletos con ejercicios que integren contenidos, pero dirigidos a la enseñanza media y media superior y en ningún caso teniendo en cuenta los niveles de desempeño cognitivo, como se propone en la presente investigación.

En la introducción de la presente tesis, se hablaba de la importancia del tema para las carreras agropecuarias por la aplicación dentro de las matemáticas que se imparten en este nivel de enseñanza y en asignaturas propias de la profesión; se destacaron ejemplos al respecto.

Para la disciplina Matemática y en especial la Matemática I, el tema de trigonometría se presenta en los siguientes aspectos:

- Cálculo de límites de funciones de una y varias variables;
- Continuidad de una función de una y varias variables;
- Derivación de funciones de una y hasta tres variables, así como funciones vectoriales;
- Cálculo del diferencial de funciones de una o varias variables. Aplicación como aproximación del incremento;
- Determinación de los extremos de funciones de una variable y dos variables;

- Trazado de curvas;
- Cálculo de integrales indefinidas aplicando las propiedades, los métodos estudiados y utilizando la tabla;
- Cálculo de integrales definidas, impropias, múltiples;
- Cálculo de áreas como aplicación del cálculo integral;
- Resolución de problemas de optimización aplicando la teoría sobre extremos y el método de los Multiplicadores de Lagrange;
- Transformación de la ecuación de una curva del sistema cartesiano al sistema polar, cilíndrico o esférico y viceversa;
- Resolución de ejercicios aplicando la teoría de Series de Fourier;
- Modelación de problemas que conduzcan a ecuaciones diferenciales;
- Cálculo gráfico y analítico de operaciones entre vectores.

2.2 Métodos de investigación utilizados.

Entre los métodos de investigación utilizados en esta investigación se encuentran:

1. Métodos del nivel teórico

Histórico lógico: Permitió encontrar las principales tendencias en el trabajo con los ejercicios matemáticos, en la resolución de problemas y los niveles de desempeño cognitivo, tanto en la literatura científica como en la práctica escolar, para dar cumplimiento al objetivo propuesto.

Análisis y Síntesis: Consistió en un estudio pormenorizado de los resultados de los estudiantes en los exámenes de ingreso a la educación superior de la asignatura Matemática, así como en los exámenes de Matemática I aplicados a los estudiantes de primer año de las carreras agropecuarias de la UNAH, determinando los contenidos de mayores dificultades.

Tránsito de lo abstracto a lo concreto: el análisis del diagnóstico inicial y de los referentes teóricos; permitió revelar las dificultades de los estudiantes en la aplicación de la trigonometría, así como el diseño de la alternativa metodológica.

Enfoque sistémico estructural: en el diseño de la alternativa metodológica, permite relacionar el tratamiento de los ejercicios y problemas, y los niveles de desempeño cognitivo con los resultados del diagnóstico inicial.

2. Métodos del nivel empírico.

Se aplicaron entrevistas a profesores y metodólogos del MINED y del MES para conocer si tenían una clara comprensión de los objetivos fundamentales a alcanzar en la enseñanza de la de la trigonometría, sus criterios sobre las dificultades que presentan los estudiantes en el cumplimiento de los objetivos de este tema.

Encuestas a los profesores para conocer sus opiniones sobre los ejercicios por niveles de desempeño cognitivo

3. Métodos Matemático – Estadístico.

Se emplearon métodos de la estadística descriptiva para el procesamiento de la información, pues no es objetivo de este trabajo hacer inferencias ni establecer correlaciones.

Población y Muestra: Se tomó como población 28 profesores de la enseñanza media superior y superior los cuales son reconocidos por su desempeño laboral y/o publicaciones en la enseñanza – aprendizaje de la matemática. Entre los profesores entrevistados se encuentran 6 que pertenecen a la facultad pedagógica de la Universidad Agraria de la Habana con vasta experiencia en el sector, los cuales han impartido docencia en la enseñanza precedente y en varias carreras universitarias, además de sobrada participación en eventos científicos de corte pedagógico, tanto en el ámbito nacional como con carácter internacional.

Se entrevistó al metodólogo de la provincia Mayabeque el cual sugirió la posterior entrevista a 2 metodólogos municipales y 4 profesores de la enseñanza media superior, con excelentes resultados en los exámenes de ingreso a la educación superior.

Completaron la entrevista 15 profesores universitarios con experiencia docente en carreras técnicas, tanto en la Universidad Agraria de la Habana como el Instituto Superior Politécnico José Antonio Echevarría de la Habana, los cuales cuentan con relevantes resultados en eventos científicos tanto nacionales como internacionales, así como varios años de experiencia docente.

El 53.57% de los encuestados tienen más de 20 años de experiencia, el 39.28% tienen entre 10 y 20 años docentes, mientras que solo el 7,14 % tiene menos de 10 años de labor profesoral.

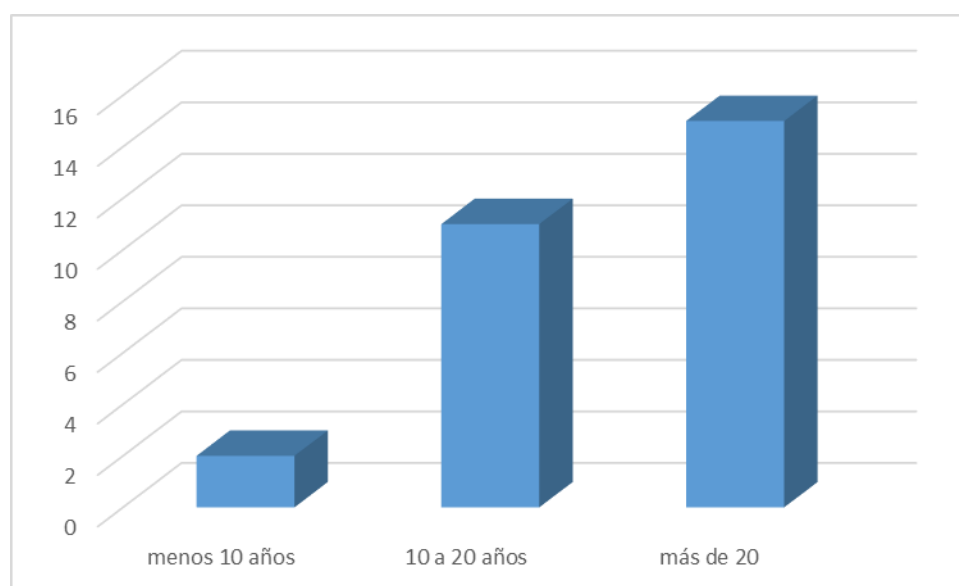


Figura 2 : Años de experiencia de los docentes entrevistados.

Fuente: Elaboracion Propia.

2.3 Aspectos de interés sobre el tipo de investigación. Metodología aplicada.

La investigación que se desarrolla es del tipo Investigación – acción, y se realiza un estudio de casos.

El estudio de casos permitió determinar las dificultades más frecuentes que presentan los estudiantes que realizan exámenes de ingreso a la educación superior y los que ya cursan una carrera universitaria, particularmente agropecuaria y que atentan la resolución y planteamiento de ejercicios.

El significado que se da en esta tesis al término “**estudio de casos**” tiene en cuenta lo planteado por Hernández Sampieri (1991, p.54) acerca de que los estudios exploratorios se efectúan cuando el objetivo es examinar un tema o problema de investigación poco estudiado o que no ha sido abordado antes. Este autor también considera que estos estudios permiten aumentar el grado de familiaridad con fenómenos relativamente desconocidos, obtener la posibilidad de llevar a cabo una investigación más completa sobre un contexto particular de la vida real, investigar problemas del comportamiento humano que consideren cruciales los profesionales de determinada área, entre otras cosas.

En el estudio de casos desarrollado en esta tesis son utilizados la encuesta, la recogida de datos e información que se necesita tomar de manera directa de los profesores y exámenes aplicados.

A pesar de que los estudios de casos están enmarcados dentro del paradigma cualitativo según Briones (1992, p.21), el mismo agrega que “**...no excluyen el uso de información cuantitativa**”, a fin de poder describir de la mejor manera posible la diversidad de situaciones y procesos que se presentan durante la labor investigativa realizada.

El autor de esta tesis se identifica con los planteamientos que de manera implícita refieren que un estudio de este tipo no dará un resultado acabado.

Estos tipos de estudios, han sido utilizados frecuentemente por personalidades de tanto prestigio como Piaget y Luria, entre otros.

Autores como (Fonte, 2003; Jon, 2005; O'Farril, 2011) que desde el punto didáctico han trabajado con propuestas de ejercicios y problemas en la enseñanza de la Matemática o el cálculo, desarrollan una metodología que tiene puntos comunes y divergentes con esta investigación.

La metodología empleada en esta investigación a partir del estudio de casos realizado, consta de cuatro etapas, ya desarrolladas en el marco de este trabajo:

1ra Etapa: Diagnóstico a través de:

- ✓ Muestreo de los exámenes de ingreso de los cursos 2013 – 2014 y 2014 – 2015 en la provincia Mayabeque, para conocer los elementos del conocimiento donde los estudiantes presentaron las mayores dificultades en el tema de trigonometría;
- ✓ Muestreo de exámenes finales de Matemática I aplicados a estudiantes de primer año de las carreras agropecuarias en la Universidad Agraria de La Habana, para determinar las principales dificultades en los contenidos evaluados en el tema que se trata.
- ✓ Resumen las principales dificultades en los contenidos evaluados en el tema que se trata, según los dos muestreos realizados;
- ✓ Revisión de los planes de estudio de las asignaturas del ejercicio de la profesión de las carreras agropecuarias para valorar los contenidos que hacen uso de la trigonometría y pueden ser relacionados con los ejercicios que serían elaborados;
- ✓ Aplicación de una entrevista para determinar la utilización de los niveles de desempeño cognitivos en ejercicios que contribuyen al desarrollo de

habilidades en Matemática, así como las dificultades que presentan los estudiantes en el proceso de enseñanza aprendizaje de la trigonometría.

2da Etapa: Ejecución de la propuesta:

- ✓ Diseño de los ejercicios por los niveles de desempeño cognitivo.

3ra Etapa: Análisis de la propuesta:

- ✓ Evaluación de los ejercicios.

4ta etapa: Rediseño de la propuesta:

- ✓ Reformulación de los ejercicios, teniendo en cuenta las sugerencias de los evaluadores.

La puesta en práctica de esta alternativa metodológica en los marcos de una investigación - acción constituye un modesto aporte a la didáctica de la escuela cubana de tener una metodología flexible, capaz de ofrecer a los profesores variantes de cómo enfrentar los problemas que a diario se presentan en las aulas y contribuye a aumentar la solidez de los conocimientos trigonométricos en los alumnos primer año de carreras agropecuarias lo cual los pone en mejores condiciones de enfrentar con éxito la resolución de ejercicios y problemas.

2.4 Resultados del muestreo a los exámenes de ingreso a la educación superior y los exámenes de Matemática I.

Los exámenes de ingreso a la educación superior se conservan durante dos años en las Comisiones de Ingreso Provinciales de cada Centro de Educación Superior, en el caso de la provincia Mayabeque esta se ubica en la Universidad Agraria de la Habana.

Los compañeros que laboran en la Comisión de Ingreso a la Educación Superior en la Provincia Mayabeque gentilmente accedieron a brindar información para esta investigación.

Durante los cursos 2013 – 2014 y 2014 – 2015, se presentaron al examen de Matemática en las dos convocatorias desarrolladas un total de 4202 estudiantes, de los cuales 2178 aprueban lo que representa el 51,8 % de aprobados.

En la página oficial del Ministerio de Educación aparecen las precisiones al programa de ingreso a la Educación Superior a partir del curso 2011-2012, en la cual se plantea:

“La prueba de ingreso de Matemática se estructurará sobre la base de 4 preguntas de desarrollo y una cerrada de formato diverso, a saber, de opción múltiple con diversas alternativas de respuesta, de verdadero o falso y completar, entre otras variantes. Las preguntas de desarrollo exigirán la resolución de problemas (en sentido amplio), mientras que la pregunta cerrada medirá objetivos específicos a un nivel reproductivo o de mayor nivel de asimilación”. (MINED, 2011, p.1)

La trigonometría aparece de manera recurrente como una herramienta a utilizar dentro de los contenidos evaluados en el examen de ingreso, adquiriendo mayor peso en las preguntas de desarrollo como: geometría plana, geometría del espacio y resolución de ecuaciones con enlace trigonométrico, cálculo trigonométrico, aplicación de razones trigonométricas, así como demostración de identidades trigonométricas. La evaluación de este contenido en la pregunta de formato diverso requiere un mayor nivel de asimilación, en comparación con otros contenidos evaluados en dicha pregunta de manera reproductiva.

Se realizó el muestreo del total de los exámenes de ingreso a la educación superior en la provincia Mayabeque en los cursos: 2013-2014 y 2014-2015 obteniéndose como resultado que, 2481 estudiantes presentan dificultades en los contenidos donde se aplica la herramienta trigonométrica, los que representan el 78,81% de los examinados.

Este muestreo permitió determinar las deficiencias en cuanto a las habilidades que poseen los estudiantes referidos a:

- Cálculo de razones trigonométricas en triángulos rectángulos de ángulos cualesquiera en el sistema sexagesimal y circular de medida de ángulos.
- Demostrar identidades aplicando identidades trigonométricas fundamentales, así como las fórmulas de adición y del ángulo duplo.
- Resolución de ecuaciones trigonométricas aplicando la generalización del concepto de ángulo para calcular razones trigonométricas.
- Resolver problemas y ejercicios de aplicación a la geometría plana.
- Resolver problemas y ejercicios de aplicación a la geometría del espacio, en el cálculo de cuerpos.
- Aplicación de teoremas sobre la resolución de triángulos cualesquiera, en particular, la ley de los senos y los cosenos.

Al realizar el muestreo y análisis de los exámenes finales de la asignatura Matemática I en las carreras agropecuarias se reveló que los estudiantes poseen dificultades en el trabajo con ejercicios y problemas con aplicaciones trigonométricos. Dichas dificultades se manifiestan al:

- Calcular límites de funciones trigonométricas de una variable, en el cálculo de valores para el ángulo y en la aplicación del límite fundamental trigonométrico e infinitésimos equivalentes trigonométricos.
- Reconocer la continuidad de una función trigonométrica de una variable.
- Derivar funciones trigonométricas aplicando derivación implícita y regla de la cadena.
- Hallar el diferencial de funciones trigonométricas, aplicando identidades trigonométricas y su posterior aplicación como aproximación del incremento.
- Hallar extremos de funciones trigonométricas.

- Trazar curvas de funciones trigonométricas.
- Cálculo de integrales trigonométricas, así como la aplicación de sustituciones trigonométrías.

Al analizar los dos muestreos realizados se observó que habilidades como: la aplicación de identidades, el cálculo de valores trigonométricos para determinados ángulos, el reconocimiento de la razón trigonométrica a aplicar, entre otras son comunes y no se superan de un nivel a otro.

Estas mismas habilidades se aplican en algunos de los contenidos de las asignaturas del ejercicio de la profesión. Lo anterior se afirma después de haber realizado un estudio a los planes de estudio de las carreras agropecuarias.

En estas el uso de la trigonometría como herramienta se hace visible fundamentalmente en los contenidos referentes a la determinación de ángulos de corte de suelo en el grupo de máquinas para la preparación de suelo y en aquellas cuya finalidad es el riego o el asperjado, para determinar el ángulo del vértice del cono y definir el área a asperjar o regar. Otro ejemplo es en la formación de agregados, pues se necesita conocer el desplazamiento del centro de gravedad, para establecer cuando puede agregarse o no el agregado

Todo lo anterior, justifica la propuesta de ejercicios por niveles de desempeño cognitivo para el desarrollo de habilidades en Matemática I en las carreras agropecuarias, que a su vez contribuirán al desarrollo de habilidades en asignaturas del ejercicio de la profesión y que se ilustran en el epígrafe que a continuación se desarrolla.

2.5 Resultados obtenidos en la entrevista a profesores.

A continuación, se expondrán los resultados de la entrevista aplicada (Anexo 3) a los profesores sobre el empleo de los niveles de desempeño cognitivo en el proceso de enseñanza aprendizaje de a matemática, así como su valoración empírica acerca de

las dificultades que se presentan en el proceso de enseñanza aprendizaje de la trigonometría.

Se realizó la entrevista con los docentes seleccionados de los cuales como se argumentó en párrafos anteriores el 92.85 % de ellos tienen más de 10 años de experiencia docente y sobrada trayectoria investigativa en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática. Además, se obtuvo los siguientes resultados de los entrevistados:

- El 78,57% posee categoría científica de doctor (17,85%) o master (60,71%)
- De un total de 28 profesores propuestos, 15 imparten docencia en carreras de corte técnico representando 53,57% de los entrevistados lo que sin lugar a dudas proporcionó información fidedigna sobre el desenvolvimiento de los estudiantes de dichas carreras en el uso de las aplicaciones trigonométricas en situaciones propias de cada especialidad.
- El resto de los entrevistados que representan el 42,46% brindaron una mejor referencia del empleo de los niveles de desempeño cognitivo en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática en general y de la trigonometría como herramienta dentro de ella en particular.

Una vez seleccionados los profesores se realizó la entrevista a cada uno de manera individual, con el propósito de que las respuestas no fueran influenciadas unas con las otras.

En el proceso se le informó a cada participante con antelación de su selección y el 100% estuvo de acuerdo con colaborar con la investigación, formulándoseles las siguientes preguntas:

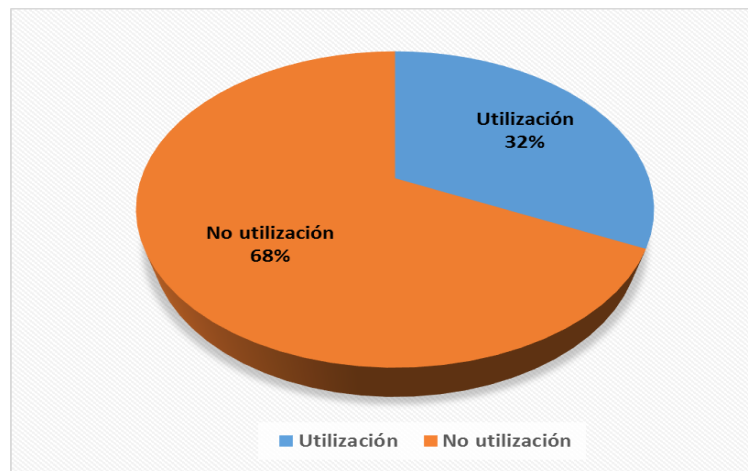
- 1) ¿Utiliza usted en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática los niveles de desempeño cognitivos?

- 2) ¿Conoce usted como pueden contribuir los niveles de desempeño cognitivo en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática?
- 3) ¿Qué dificultades ha detectado usted en los estudiantes durante el proceso de enseñanza de la trigonometría?

En los siguientes gráficos se resumen las respuestas de los encuestados en cuanto a la utilización de los niveles de desempeño cognitivo en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática, así como el conocimiento acerca de la contribución de los mismos al desarrollo de dicho proceso.

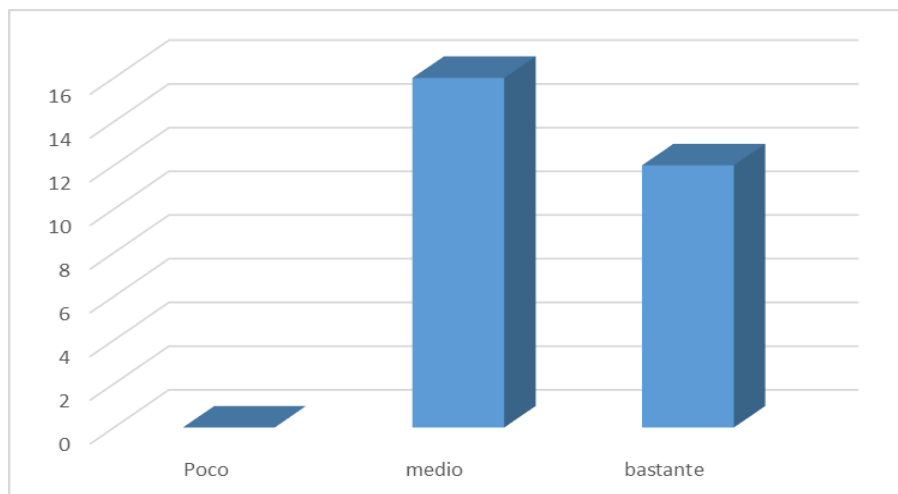
Según el análisis de los porcentajes se aprecia que cada tres profesores solo uno utiliza los niveles de desempeño cognitivo en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática, y que a pesar de que ningún profesor duda sobre la contribución de estos al desarrollo del proceso, la mayoría no le atribuye mayor importancia a su utilización.

Figura 3: Utilización en el proceso de enseñanza aprendizaje de los niveles de desempeño cognitivo.



Fuente : Elaboracion Propia.

Figura 4: Contribución de los niveles de desempeño cognitivo en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática.



Fuente: Elaboración Propia.

En cuanto a la tercera pregunta de la entrevista el 100% de los profesores está de acuerdo con respecto a la dificultad que representa para los estudiantes el trabajo con la trigonometría según el contexto de cada enseñanza o especialidad impartida; incluso los profesores llegan a plantear que los estudiantes manifiestan rechazo hacia los ejercicios donde se aplica la trigonometría como medio de solución, prefiriendo, en caso de existir, otro camino para la solución de un ejercicio o problema planteado. Coincidiendo como mayores dificultades detectadas las planteadas en esta tesis en párrafos anteriores.

La entrevista aplicada corrobora la necesidad de este estudio, y los métodos utilizados propiciaron la lógica de la investigación que se presenta.

Capítulo 3: Propuesta de ejercicios trigonométricos por niveles de desempeño cognitivo

Este capítulo se estructura en dos epígrafes. En el primer epígrafe se presenta una muestra de los ejercicios diseñados por cada uno de los tres niveles de desempeño cognitivo ya descritos y se realiza una descripción de sus soluciones. En el segundo epígrafe se dan a conocer los resultados de la encuesta aplicada a los profesores sobre la clasificación de los ejercicios por niveles de desempeño cognitivo

3.1 Propuesta de ejercicios de trigonometría por niveles de desempeño cognitivo

Se proponen 25 ejercicios (Anexo 5). En cuya selección tuvo un elevado valor el texto de las autoras Rey y Cisternas (2005, p.1) donde expresan:

“Considerando la experiencia académica que poseemos y sabiendo que el alumno, que ingresa a la Universidad, no tiene claro los conocimientos básicos (...), es que hemos elaborado este manual de ejercicios de trigonometría.”

Así como los ejercicios propuestos por Andreescu y Feng (2005) para el entrenamiento del equipo de Estados Unidos para la participación del mismo en la Olimpiada Internacional de Matemática y Barnett et al. (2007) en el texto Precálculo, de ambos textos se seleccionaron algunos ejercicios ubicados en los niveles II y III.

3.1.1 Caracterización de los ejercicios por niveles de desempeño cognitivo

Se proponen 25 ejercicios, distribuidos por los tres niveles de desempeño cognitivo de la siguiente manera:

- El nivel I con 6 ejercicios eminentemente reproductivos, donde los estudiantes hacen uso de conocimientos básicos matemáticos para la solución de los mismos.
- El nivel II con 15 ejercicios o situaciones problemáticas enmascaradas en los llamados problemas rutinarios que tienen una vía de solución conocida al

menos para la mayoría de los alumnos, que, sin llegar a ser propiamente productivas, tampoco pueden ser consideradas del todo reproductivas.

- El nivel III con 4 ejercicios de los llamados problemas propiamente dichos donde el nivel de producción de los mismos es más elevado, que exigen al estudiante poner en juego su conocimiento matemático.

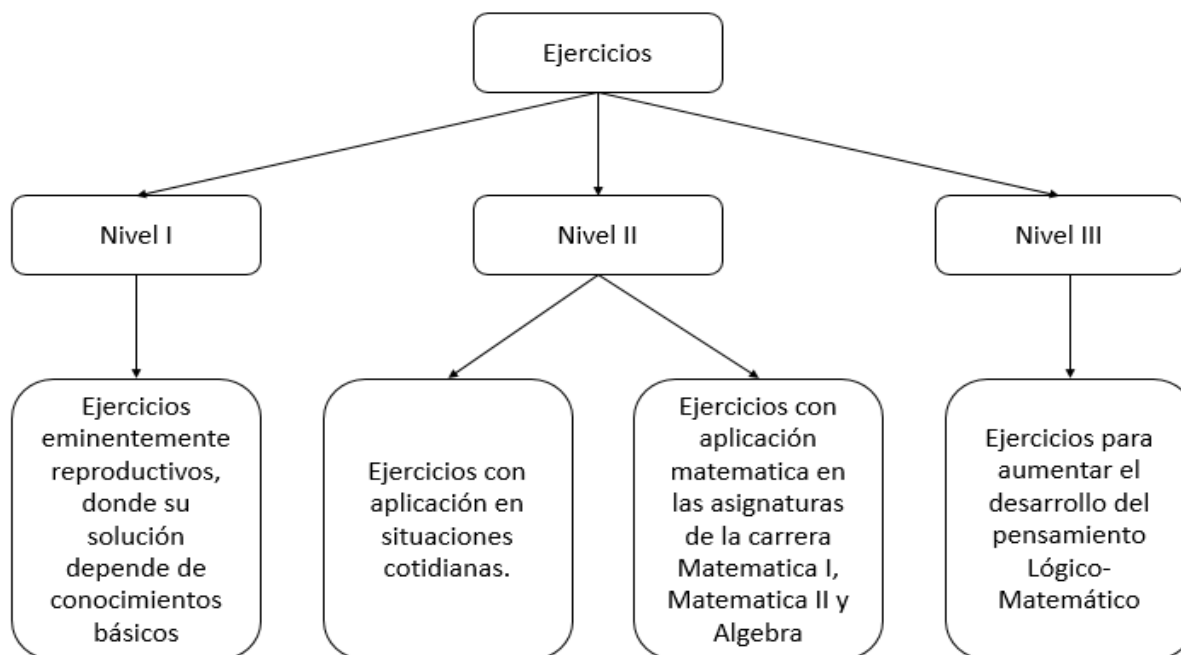


Figura 5: Caracterización de los ejercicios por niveles de desempeño cognitivo.

Fuente: Elaboración Propia

En el nivel I se plantean ejercicios sin aplicación en situaciones cotidianas para los estudiantes de las carreras agropecuarias, donde se ponen a prueba los conocimientos básicos de los estudiantes.

En el nivel II se agrupan 15 ejercicios de los cuales el 60% tienen aplicación en situaciones usuales para los estudiantes de las carreras agropecuarias con lo que se

pretende mostrar a los mismos la utilidad de la trigonometría como una herramienta dentro de las matemáticas.

En el nivel III se plantean ejercicios sin aplicaciones en situaciones cotidianas para el estudiante considerados situaciones problémicas con el propósito de aumentar el desarrollo del pensamiento lógico – matemático.

Se debe destacar que en la aplicación de un contenido dentro de la matemática superior puede transitar dentro de los tres niveles de desempeño cognitivo según el tratamiento que se haga del mismo.

Nivel I: En este nivel se consideran los alumnos que son capaces de resolver ejercicios formales eminentemente reproductivos, es decir, en este nivel están presentes aquellos contenidos y habilidades que conforman la base para la comprensión matemática.

Ejercicio: Calcule los límites siguientes:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen} x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\text{sen} x}{x}$$

Respuesta:

En los dos incisos iniciales se aplican conocimientos básicos eminentemente reproductivos, ya que simplemente con el conocimiento del límite fundamental trigonométrico en el primero y la aplicación de la identidad de la tangente en el segundo para luego volver aplicar el límite fundamental trigonométrico se obtienen ambos resultados sin mayor esfuerzo.

2) Calcula:

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - 2\cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)}$$

En este ejercicio el estudiante trabaja de manera reproductiva con las fórmulas de los ángulos complementarios donde la expresión se reduce a:

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cot\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

Sustituyendo los valores trigonométricos nos queda la expresión:

$$\frac{\frac{\sqrt[3]{3}}{2} + \frac{\sqrt[3]{3}}{2}}{1 - 2\sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{1 - 2\sqrt[3]{3}}$$

Nivel II: Situaciones problémicas enmascaradas en los llamados problemas rutinarios que tienen una vía de solución conocida al menos para la mayoría de los alumnos, que, sin llegar a ser propiamente reproductivas, tampoco pueden ser consideradas del todo productivas. Este nivel constituye un primer paso para el desarrollo de la capacidad para aplicar estructuras matemáticas a la resolución de problemas.

1) Un tractor ara la tierra en línea recta a una velocidad de 15 km/h. en el mismo terreno a una distancia de 25m del surco realizado por el tractor, se ubica un campesino que analiza el trabajo realizado. ¿A qué velocidad gira la vista el campesino cuando el tractor se encuentra a 16 m del punto del surco más cercano del campesino?

Respuesta:

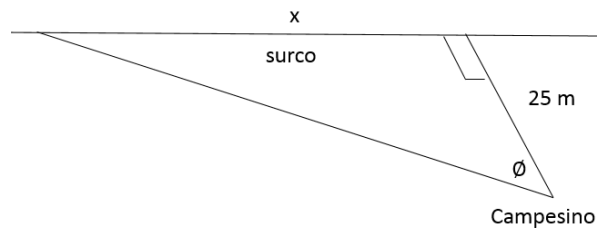
En este ejercicio se plantea una situación propia de las Carreras Agropecuarias donde el estudiante sin llegar a realizar un análisis productivo, aplica sus conocimientos acerca del contenido propio de la Matemática I y pone a prueba sus habilidades de una manera poco reproductiva.

El primer paso sería realizar un análisis gráfico de la situación planteada e identificar los datos y la incógnita:

Datos

Velocidad del tractor: $\frac{dx}{dt} = 15 \text{ km/h}$

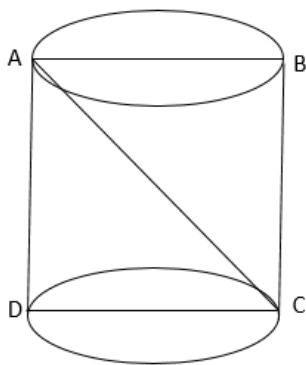
Incógnita: $\frac{d\theta}{dt} = ?$



La relación entre la incógnita y los datos se realiza mediante la siguiente fórmula:

$\tan\theta = \frac{x}{25}$ despejando queda $x = 25\tan\theta$ la cual se deriva respecto al tiempo obteniéndose la relación $\frac{dx}{dt} = 25\sec^2\theta \frac{d\theta}{dt}$ se sustituyen los datos, se procede a despejar la incógnita y al posterior cálculo.

2) Se tiene un tanque en forma cilíndrica para el almacenaje de fertilizante. Se conoce que la base del tanque tiene un perímetro de 15.7 dm, los diámetros de las bases son paralelos y forman el rectángulo ABCD, la diagonal interior del rectángulo ABCD tiene una inclinación de 55° respecto a la base del cilindro. ¿Qué tiempo se demorará en llenar el depósito si se bombea agua a una velocidad a razón de 2 L/min?



Respuesta:

En este ejercicio se plantea una situación en la que el estudiante primero debe calcular la capacidad del depósito y luego dividir la capacidad entre la velocidad para así obtener el tiempo de llenado.

Trabajaremos con el perímetro: $2\pi r = 15.7dm$

Donde $r = 2.5 dm$ entonces se calcula el área de la base $A = \pi r^2$

$$A = 19,625 dm^2.$$

Ahora se procede al cálculo de la altura del depósito aplicando razones trigonométricas en el triángulo ADC rectángulo en C.

$$\tan 55^\circ = \frac{h}{5}$$

$$h = \tan 55^\circ * 5$$

$$h = 1.42 * 5$$

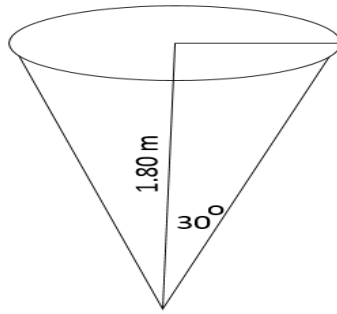
$$h = 7.14dm$$

$$\text{Donde } V = 19,625 * 7.14 = 140,13dm^3 = 140.13Litros$$

$$\text{Dividiendo queda } \frac{140.13}{2} = 70min$$

Por lo que el depósito se llenara aproximadamente en 1 hora y 10 min.

3) Se tiene en elevados un depósito conformado por una base en forma de cono invertido sobre el cual está un cilindro circular recto de igual altura que el cono y cuya base coincide con la del cono. Si la altura del cono es de 1.80m y el ángulo que forma la generatriz del cono con dicha altura es de 30° . Calcule la velocidad con que sube el nivel del agua cuando la profundidad alcanza un metro.



Al igual que en el ejercicio anterior el estudiante procede calculando la longitud del radio del depósito.

$$\tan 30^\circ = \frac{r}{1.80}$$

$$0.57 * 1.8 = r$$

$$r = 1.026 \text{ m}$$

Ahora se procede a calcular la velocidad pedida. Se utiliza la relación $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$

La cual derivaremos respecto al tiempo, pero primero utilizaremos el teorema de las transversales para establecer una relación entre la altura y el radio.

$$\frac{r}{h} = \frac{1.026}{1.8}$$

$$r = \frac{h * 1.026}{1.8} = 0.57 * h$$

$$\text{Quedando } V = \pi * h^3 * 0.1083$$

$$\text{Y se procede a derivar } \frac{dv}{dt} = 0.1083 * \pi * 3h^2 \frac{dh}{dt}$$

$$\text{Sustituyendo } 2 = 0.1083 * 3.14 * 3 * (1)^2 \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = 1.96 \text{ m/min.}$$

Nivel III: Problemas propiamente dichos, donde la vía por lo general no es conocida por la mayoría de los alumnos y donde el nivel de producción de los mismos es más elevado. En este nivel los estudiantes son capaces de reconocer estructuras matemáticas complejas y resolver problemas que no implican necesariamente el uso de estrategias, procedimientos y algoritmos rutinarios, sino que posibilitan la puesta en escenas de estrategias, razonamientos y planes no rutinarios que exigen al estudiante poner en juego su conocimiento matemático.

Ejercicio 1): Calcule la siguiente integral:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(4x^3 - 24x + 27)^3}}$$

En este problema los estudiantes se enfrentan a una situación desconocida para la mayoría de ellos. Se utilizará una sustitución trigonométrica pero su aplicación no es reproductiva, sino que requiere de la producción del estudiante.

Primero se debe realizar un trabajo algebraico con el denominador

$$\sqrt{(4x^3 - 24x + 27)^3} = \sqrt{4^3 \left(x^3 - 6x + \frac{27}{4}\right)^3} = \sqrt{4^3} \sqrt{\left(x^3 - 6x + \frac{27}{4}\right)^3} = 8 \sqrt{\left(x^3 - 6x + \frac{27}{4}\right)^3}$$

Y se realiza el completamiento cuadrático del trinomio, quedando

$$8 \sqrt{\left(x^3 - 6x + 9 + \frac{27}{4} - 9\right)^3} = 8 \sqrt{\left((x-3)^2 - \frac{9}{4}\right)^3} = 8 \sqrt{\left((x-3)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right)^3}$$

Donde $\int \frac{dx}{\sqrt{(4x^3 - 24x + 27)^3}} = \int \frac{dx}{8 \sqrt{\left((x-3)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right)^3}}$ donde es de la forma $u^2 - a^2$

Haciendo el cambio: $x - 3 = \frac{3}{2} \sec t$ $dx = \frac{3}{2} \sec t \tan t dt$ el denominador de la

integral se transforma en $8 \sqrt{\left[\left(\frac{3}{2} \sec t\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right]^3} =$
 $8 \left(\frac{3}{2}\right)^3 \left(\sqrt{(\sec t)^2 - 1}\right)^3 = 27 \left(\sqrt{(\tan t)^2}\right)^3 = 27(\tan t)^3.$

Ahora la integral es de la forma: $\int \frac{\frac{3}{2} \sec t \tan t dt}{27 (\tan t)^3} = \frac{1}{18} \int \frac{\sec t dt}{(\tan t)^2}$

Aplicando razones trigonométricas

$$\frac{1}{18} \int \frac{\sec t dt}{(\tan t)^2} = \frac{1}{18} \int \frac{1}{\cos t} \frac{(\cos t)^2}{(\sen t)^2} dt = \frac{1}{18} \int \frac{\cos t}{(\sen t)^2} dt$$

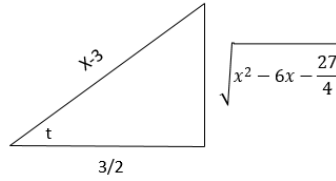
En esta nueva integral se realiza el siguiente cambio de variable: $u = \sen t$ y $du = \cos t dt$

$$\frac{1}{18} \int \frac{\cos t}{(\sen t)^2} dt = \frac{1}{18} \int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{18} \left(\frac{-1}{u} \right) = \frac{-1}{18u}$$

Realizando los cambios de variables pertinentes se obtiene:

$$\frac{-1}{18u} = \frac{-1}{18} \left(\frac{1}{\sen t} \right) = \frac{-1}{18} \left(\frac{1}{\frac{\sqrt{x^2 - 6x - \frac{27}{4}}}{x-3}} \right) = \frac{-1}{18} \left(\frac{x-3}{\sqrt{x^2 - 6x - \frac{27}{4}}} \right)$$

Utilizando:



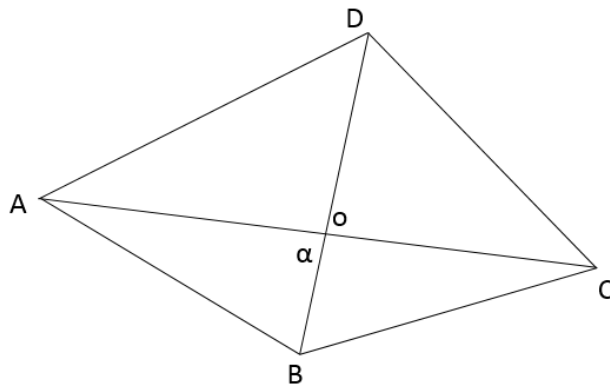
Por lo que:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(4x^3 - 24x + 27)^3}} = \frac{-1}{18} \left(\frac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 6x - \frac{27}{4}}} \right) + C$$

2) Se tiene un terreno con forma de cuadrilátero convexo y se quiere saber la superficie que abarca. Demuestre que realizando las mediciones entre los vértices opuestos se obtiene que el área se puede calcular por el semiproducto de las dos mediciones por el seno del ángulo que forman entre ellas.

Respuesta:

Ahora se pone a consideración una situación realmente problemática donde se desconoce la solución por parte de al menos la mayoría de los estudiantes, al igual que en el ejercicio anterior la primera idea del estudiante es realizar un gráfico del problema en cuestión.



Se pide demostrar que $A = \frac{AC \cdot BD \cdot \text{sen} \alpha}{2}$

Pero a diferencia del ejercicio del nivel II este se requiere un elevado nivel del conocimiento matemático del estudiante.

Utilizando que el área del cuadrilátero es la suma de los 4 triángulos interiores se

obtiene que: $A = \frac{AO \cdot BO \cdot \text{sen} \alpha}{2} + \frac{BO \cdot CO \cdot \text{sen}(180 - \alpha)}{2} + \frac{CO \cdot DO \cdot \text{sen} \alpha}{2} + \frac{DO \cdot AO \cdot \text{sen}(180 - \alpha)}{2}$

donde utilizando que el $\text{sen} \alpha = \text{sen}(180 - \alpha)$ ya que el seno tiene igual signo en el primer y el segundo cuadrante, quedando

$$A = \frac{\text{sen} \alpha}{2} (AO \cdot BO + BO \cdot CO + CO \cdot DO + DO \cdot AO)$$

$$A = \frac{\text{sen} \alpha}{2} (AO \cdot BO + CO \cdot (BO + DO) + DO \cdot AO)$$

$$A = \frac{\text{sen} \alpha}{2} (AO \cdot BO + CO \cdot BD + DO \cdot AO)$$

$$A = \frac{\text{sen} \alpha}{2} (AO \cdot (BO + DO) + CO \cdot BD)$$

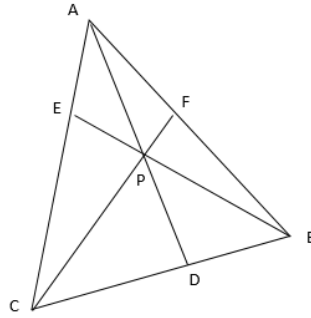
$$A = \frac{\text{sen} \alpha}{2} (AO \cdot BD + CO \cdot BD)$$

$$A = \frac{\text{sen} \alpha}{2} (BD \cdot (AO + CO))$$

$$A = \frac{\text{sen} \alpha}{2} BD \cdot AC$$

Quedando demostrado.

3) Dado el triángulo ABC y AD, BE, CF segmentos que se cortan en un punto P. Demostrar que $AF \cdot BD \cdot CE = FB \cdot DC \cdot EA$ (Teorema de Ceva).



Respuesta: en este problema propiamente dicho se le propone al estudiante una solución eminentemente trigonométrica con el objetivo de desarrollar el pensamiento lógico-matemático, aunque dicho ejercicio no tenga una aplicación directa en el perfil de una carrera agropecuaria.

Antes de analizar la solución es necesario realizar pequeñas observaciones que serán muy útiles:

$$\text{sen}AEP = \text{sen}PEC$$

$$\text{sen}CDP = \text{sen}BDP$$

$$\text{sen}BFP = \text{sen}AFP$$

En este problema se utiliza la Ley de los senos, pero de una manera ingeniosa

$$\frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\beta} = \frac{c}{\text{sen}\gamma} = 2R$$

En $\triangle APE$:

$$\frac{AP}{\text{sen}E} = \frac{AE}{\text{sen}APE} \text{ ecuación1}$$

En $\triangle PDC$:

$$\frac{PC}{\text{sen}D} = \frac{DC}{\text{sen}DPC} \text{ ecuación2}$$

En $\triangle BFP$:

$$\frac{BP}{\text{sen}F} = \frac{BF}{\text{sen}FPB} \text{ ecuación3}$$

En $\triangle EPC$:

$$\frac{PC}{\text{sen}E} = \frac{EC}{\text{sen}EPC} \text{ ecuación4}$$

En $\triangle BPD$:

$$\frac{BP}{\text{sen}D} = \frac{BD}{\text{sen}DPC} \text{ ecuación5}$$

En $\triangle AFP$:

$$\frac{AP}{\text{sen}F} = \frac{AF}{\text{sen}APF} \text{ ecuación6}$$

Multiplicando las ecuaciones 1,2 y 3 resulta:

$$\frac{\frac{AP}{\text{sen}E} * PC}{\text{sen}D} * BP = \frac{\frac{AE}{\text{sen}APE} * DC}{\text{sen}DPC} * BF \text{ ecuación7}$$

Multiplicando las ecuaciones 4,5 y 6 resulta:

$$\frac{\frac{PC}{\text{sen}E} * BP}{\text{sen}F} * AP = \frac{\frac{EC}{\text{sen}EPC} * BD}{\text{sen}BPD} * AF \text{ ecuación8}$$

Dado que los miembros izquierdos de las ecuaciones 7 y 8 son iguales, se puede realizar la igualdad de ambas expresiones:

$$\frac{\frac{AE}{\text{sen}APE} * DC}{\text{sen}DPC} * BF = \frac{\frac{EC}{\text{sen}EPC} * BD}{\text{sen}BPD} * AF$$

y simplificando los senos de los ángulos que son iguales por opuestos por el vértice se obtiene la expresión deseada:

$$AE * DC * BF = EC * BD * AF$$

3.2 Evaluación de los ejercicios con aplicaciones trigonométricas por niveles de desempeño cognitivo

Posterior a la entrevista con los profesores, se puso a disposición de ellos una propuesta de 25 ejercicios con aplicaciones trigonométricas clasificados por niveles

de desempeño cognitivo, con la finalidad de que dieran su valoración acerca de la clasificación de los mismos (Anexo 6).

Las siguientes tablas muestran la frecuencia relativa porcentual alcanzada por cada uno de los ejercicios en los diferentes niveles de desempeño cognitivo, en el análisis de los resultados de esta encuesta no se tuvo en cuenta las clasificaciones de poco adecuado o no adecuado ya que ninguno de los ejercicios puestos a consideración de los profesores fue catalogado dentro de ellas.

Tabla 1: Frecuencia porcentual de la clasificación de los ejercicios en el nivel de desempeño cognitivo I.

Nivel I	Muy Adecuado	Bastante Adecuado	Adecuado
1	100	0	0
2	100	0	0
3	92.85	7.14	0
4	42.85	57.14	0
5	78.57	17.85	3.57
6	28.57	50	21.42

Fuente: Elaboración Propia.

Entre los ejercicios expuestos al análisis de los profesores, dos de ellos (ejercicio 1 y 2) contaron con total aprobación sobre su ubicación dentro de los niveles de desempeño cognitivo. Otros 2 (ejercicios 3 y 4) recibieron una clasificación satisfactoria según el criterio del autor de esta tesis ya que el 100% de ellos fue ubicado a lo sumo bastante adecuado. El resto de los ejercicios de este nivel estuvieron sujetos a cambios según la opinión de los profesores, provocando un rediseño del ejercicio 5y 6, el cual ya está incluido en la propuesta de la presente investigación.

Tabla 2: Frecuencia porcentual de la clasificación de los ejercicios en el nivel de desempeño cognitivo II

Nivel II	Muy Adecuado	Bastante Adecuado	Adecuado
1	75	21.42	3.57
2	82.14	7.14	10.71
3	85.71	14.28	0
4	96.42	3.57	0
5	96.42	3.57	0
6	100	0	0
7	82.14	17.85	0
8	78.57	17.85	3.57
9	89.28	10.71	0
10	100	0	0
11	92.85	7.14	0
12	67.85	21.42	10.71
13	92.85	7.14	0
14	100	0	0
15	92.85	7.14	0

Fuente: Elaboración Propia.

En el segundo nivel tres ejercicios obtuvieron 100% de total aceptación (ejercicios 6,10 y 14), otros 8 se mantuvieron dentro de los valores deseados y 4 de los 15 (ejercicios 1, 2, 8 y 12) presentados en este nivel fueron clasificados como adecuado por algunos de los profesores lo que propicio el rediseño de los mimos, lo cual esta incluido en la propuesta final de los ejercicios por niveles de desempeño cognitivo.

Mientras que el total de los ejercicios puestos a consideración de los profesores en el tercer nivel fueron clasificados de muy adecuado. Destacándose por parte de los profesores su elevado nivel de dificultad por lo que constituyen verdaderos problemas.

Tabla 3: Frecuencia porcentual de la clasificación de los ejercicios en el nivel de desempeño cognitivo III

Nivel III	Muy Adecuado	Bastante Adecuado	Adecuado
1	100	0	0
2	100	0	0
3	100	0	0
4	100	0	0

Fuente: Elaboración Propia.

De los 25 ejercicios iniciales de la propuesta 9 fueron clasificados como muy adecuados lo que representan el 36% de la propuesta, el 40 % del resto obtuvo clasificaciones entre muy adecuado y bastante adecuado; y solo el 24% de los ejercicios (6 de 25) obtuvo clasificación de adecuado lo que propicio el posterior rediseño de los mismos, lo cual ya está incluido en la propuesta.

CONCLUSIONES

1. Los referentes teóricos estudiados, permitieron diseñar la alternativa metodológica a través de ejercicios por niveles de desempeño cognitivo para contribuir al desarrollo de habilidades trigonométricas en Matemática I en estudiantes de carreras agropecuarias, la cual constituye una novedad de carácter teórico – metodológico.
2. El diagnóstico del estado actual del desarrollo de habilidades trigonométricas en los estudiantes del primer año de las carreras agropecuarias, permitió conocer los contenidos donde los estudiantes presentan mayores dificultades.
3. El análisis de los planes de estudio de las carreras agropecuarias, permitió determinar los elementos del conocimiento trigonométrico que deben dominar los estudiantes de estas carreras.
4. Los resultados del diagnóstico y el estudio de los planes de estudio propicio realizar una correcta elaboración de los ejercicios por niveles de desempeño cognitivo, los que permiten a los estudiantes el ascenso gradual de la aplicación de los contenidos estudiados en Matemática I en las carreras agropecuarias.

RECOMENDACIONES

La alternativa metodológica diseñada a través de ejercicios por niveles de desempeño cognitivo para contribuir al desarrollo de habilidades trigonométricas en Matemática I en estudiantes de carreras agropecuarias, puede ser adoptada y generalizada en la Disciplina Matemática, con los ajustes propios de su situación específica.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abreu, R. M (1993) Teórico de la Pedagogía. La Habana, ISPETP
- Acosta, S. 2013. XIII Seminario Nacional para Educadores; *La Fijación: Una Función Didáctica de la asignatura Matemática*. Playa. Félix Varela
- Algarín, D. L. & Leal, J. E. F. 2013. Caracterización de los niveles de razonamiento de Van Hiele específicos a los procesos de descripción, definición y demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas. *Educación Científica y Tecnológica*, EDICIÓN ESPECIAL. Disponible: <http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/revcie/article/download/5485/7020>. [Consulta: 5 febrero 2014]
- Álvarez, C (1999) Didáctica: La escuela en la vida, La Habana, Pueblo y educación.
- Andreescu, T. & Feng, Z. 2005. 103 Trigonometry Problems from the Training of The USA IMO Team, Boston,
- Arango, C. & Ballester, S. 1995. Cómo consolidar los conocimientos matemáticos en los alumnos In: ACADEMIA, E. (ed.) *Proposiciones Metodológicas*. La Habana. (p.43)
- Aristimuño, A. 2004. *Las competencias en la educación superior: ¿demonio u oportunidad?* Docencia Universitaria e Innovación, Barcelona.
- Artigue, M. 2003. ¿Qué Se Puede Aprender de la Investigación Educativa en el Nivel Universitario? *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, X.
- Azcárate, C. & Camacho, M. 2003. Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, X.
- Ballester, S., Santana, H., Hernández, S., Cruz, I. & Arango, C. 2000. *Metodología de la Enseñanza de la Matemática*. In: Educación, P. Y. (ed.). Pueblo y Educación. (pp. 225-407)
- Barnett, R., 2007. Precálculo. Funciones y Graficas.
- Benítez, E. M. G. 2012. *Una alternativa didáctica para la estructuración del proceso de enseñanza aprendizaje en las clases de la asignatura Matemática*

en la Educación Secundaria Básica. Doctorado, Universidad de Ciencias Pedagógicas “Enrique José Varona.

- Briones, Guillermo., 1992. *La investigación social y educativa (Formación de docentes en investigación educativa)*. Editorial SECAB. Santa fe de Bogotá. Colombia. (p. 21)
- Brito, H (1987) *Psicología General para la ISP*. La Habana, Pueblo y Educación.
- Campistrous, L. & Rizo, C. 1996. *Algunas técnicas de resolución de problemas aritméticos. Curso prereunión en el Evento Pedagogía 1999*, Ciudad de la Habana.
- _____. 1998. Estrategias de resolución de problemas en la escuela. *Revista Relime*. México.(p.11)
- _____. 2002. Aprende a resolver problemas aritméticos. *In: Educación*, P. Y. (ed.) 5ta ed. Playa.
- Cantoral, R. & Farfán, R. M. 2003. Matemática Evolutiva: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*.
- Cantoral, R. 1993. Hacia una didáctica del cálculo basada en la cognición. *Publicaciones Centroamericanas*, 7, 391.
- Ceacero, J. & González, M. J. 2013. El Razonamiento Analógico como Solución de Problemas. *In: VARELA, F. (ed.) Temas de Psicología Cognitiva*. La Habana.
- Cervera Márquez, Pablo, 1998. *Algunas estrategias para la resolución de problemas geométricos en duodécimo grado. Tesis de maestría. Instituto Superior Politécnico “Julio Antonio Mella”. Facultad de Matemática – Física. Santiago de Cuba*. (p.20)
- Contreras, A.,1987. La resolución de problemas de geometría elemental. *I Jornadas Andaluzas de Profesores de Matemáticas de escuelas de magisterio*. (p. 21). Almería citado por Mónaco, B. & Aguirre, M. 1995.

Caracterización de algunas estrategias para resolver problemas aritméticos y algebraicos en el nivel medio básico: Un estudio de casos. Tesis de Maestría, Universidad Autónoma de Guerrero.

- Educación, M. D. 2009. Programas Décimo Grado Educación Preuniversitaria Primer Año Educación Técnica y Profesional. *In:* Educación, P. Y. (ed.). Playa.
- Fonte, A. 2003. *Estrategias que utilizan los alumnos de secundaria básica.* Master, Universidad Pedagógica Enrique José Varona.
- Geissler, O. E., 1979 Metodología de la enseñanza de la matemática: De 1 a 4 grado. La Habana, Pueblo y educación.
- Godino, J. D. 2002. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, (p.22, 237)
- Gonzales, O. ,1999 I enfoque histórico cultural como fundamento de una concepción pedagógica. (p.5)
- Hernández, J. 1998. *¿Cómo estas en Matemáticas?*, Playa. Pueblo y Educación
- Jon, I. 2005. Una alternativa metodológica para la introducción de los ejercicios de nuevo tipo en la enseñanza de la matemática. Universidad pedagógica, Enrique José Varona.
- Jungk, W. 1981. *Conferencias sobre metodología de la enseñanza de la Matemática 2, Primera Parte.* Editorial de Libros para la Educación. Ciudad de la Habana, Playa.
- Kilpatrick, J. 1985. *A Retrospective Account of the Twenty-five years of Research on Teaching Mathematical Problem Solving.* E. A Silver (Ed.) Teaching and Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspective (p. 15). Hillsdale: Lawrence Erlbaum. Citado por Cervera Márquez, Pablo, 1998. *Algunas estrategias para la resolución de problemas geométricos en duodécimo grado. Tesis de maestría. Instituto Superior Politécnico "Julio Antonio Mella". Facultad de Matemática – Física. Santiago de Cuba*

- Krutatskii, V.A. (1969) An experimental analysis of pupil's mathematical abilities insiviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics the structure of mathematical abilities: Volume 2. Chicago, Jermy Kilpatrick and Isack Wirszup teacher college the University of Chicago of Chicago. (p.22)
- Labarreda, G. & Valdivia, G. E. 2009. El proceso de Enseñanza. *In: Educación, P. Y. (ed.) Pedagogía*. Playa.
- Labarrere, A. F. 1987. *Bases psicopedagógicas de la enseñanza de la solución de problemas matemáticos en la escuela primaria*, Ciudad de la Habana.
- Lacueva, A. 2008. Notas a propósito de modelos didácticos de base cognitiva. *Paradigma*, XXIX, 235.
- Llivina, M. J. 1999. *“Una propuesta metodológica para contribuir al desarrollo de la capacidad para resolver problemas matemáticos”*. Doctorado, Universidad Pedagógica “Enrique José Varona”.
- López, J. 2010. La orientación como parte de la actividad cognitiva de los escolares. *In: Educación, P. Y. (ed.) Temas de Psicología Pedagógica para maestros* Ciudad de la Habana.
- López, M. (1990) Saber enseñar a describir, definir, argumentar. La Habana, Pueblo y Educación. (pp.17-19)
- Lorenzo, J. L. M., Albert, J. S. C. & Hernández, M. O. 2010. Estilos y Estrategias para el aprendizaje de las Ciencias Básicas en la Carrera DE Agronomía: Experiencias desde la Universidad de Pinar del Río. *Centro de Estudios en Ciencias de la Educación Superior (CECES). Universidad de Pinar del Río “Hermanos Saiz Montes de Oca”*. Disponible en: <http://cvi.mes.edu.cu/peduniv/index.php/peduniv/article/viewFile/520/514>. [Consulta: 10 marzo 2015]
- Martín, M. Á. C. & Zavala, J. C. N. 2006. Entrenamiento de alumnos de Educación Superior en estrategias de aprendizaje en matemáticas. *Psicothema*

- Mónaco, B. & Aguirre, M. 1995. *Caracterización de algunas estrategias para resolver problemas aritméticos y algebraicos en el nivel medio básico: Un estudio de casos*. Tesis de Maestría, Universidad Autónoma de Guerrero. (p.17)
- Moreno, M. D. M. M. 2008. El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*
- Muller, J. (1987). *Aspectos Metodológicos acerca del trabajo con ejercicios en la enseñanza de la matemática*, La Habana Editorial: Pueblo y Educación
- Naredo, R. 2013. *Entrénate en Geometría*, Playa. Pueblo y Educación.
- O'Farriel, I. 2003. *Propuesta de un sistema de ejercicios para el desarrollo de habilidades*. Master, Universidad Pedagógica Rubén Martínez Villena.
- Osorio, F. C. 2005. El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en la educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8.
- Peña, M. J. 2001. *Una alternativa metodológica para la introducción de los ejercicios de nuevo tipo en la enseñanza de la Matemática*. Master, Universidad Pedagógica "Enrique José Varona".
- Peña, M. J. 2001. *Una alternativa metodológica para la introducción de los ejercicios de nuevo tipo en la enseñanza de la Matemática*. Master, Universidad Pedagógica "Enrique José Varona".
- Pérez, M. T. B. 2009. *Sistema de Actividades para el Desarrollo de Habilidades en la Resolución de Problemas Aritméticos para la Educación de Jóvenes y Adultos*. Master, Instituto Superior Pedagógico "Rubén Martínez Villena".
- Petrovsky, A. V, 1978 *Psicología pedagógica y de las edades*. La Habana, Pueblo y Educación.
- Picazo, J. T. 2004. *Evaluación de Habilidades Cognitivas en la Resolución de Problemas Matemáticos*. Doctoral, Universidad de Valencia.

- Polya, G., 1962. *¿Cómo plantear y resolver problemas?* Trillas, México citado por Santos, L. M. 1996. *Principios y Métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*, México.
- Polya, G., 1976. *Matemáticas y razonamiento plausible*. Temas, Madrid (p.111)
- Polya, G., 1977. *Mathematical Methods in Science*. Manufactured in the United States of America.
- Posadas, S. Y. 2008. *Estrategias Didácticas en la Asignatura Matemática I (MM-110) Para Desarrollar la Habilidad de Resolver Problemas en los alumnos de Ingeniería Agroindustrial del Centro Universitario Regional nororiental*. Maestría, Universidad Nacional Autónoma de Honduras.
- Puig, S. 2009. *Propuesta para Evaluar el desempeño cognitivo de los escolares*. In: ACADEMIA (ed.). La Habana.
- Retana, J. Á. G. 2013. La problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo para ingeniería. *Revista Educación*, 37, 29.
- Rey, V. Cisternas, M. 2005. Ejercicios resueltos de trigonometría y complementarios al texto: *Trigonometría y Geometría Analítica para las carreras de Ingeniería.*, Arica, Chile
- Reyes, C. 2012. Propuesta de ejercicios de trigonometría para la Unidad 4 de décimo grado. *Joven Educador Revista Electrónica Científico Pedagógica*. Disponible en: <http://www.joveneducador.rimed.cu/index.php/ano-4-revista-n-11-2012/99-propuesta-de-ejercicios-de-trigonometria-para-la-unidad-4-de-decimo-grado>. [Consulta: 06 febrero 2015]
- Riviére, A. 1999. Problemas y Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva cognitiva. *Desarrollo psicológico y educación*, III, 155.
- Rubio, R., Hernández, J. E., Mola, E. L. D. & Roca, F. 2006. Los niveles de asimilación y niveles de desempeño cognitivo. Reflexiones. *Humanidades Médicas*. Disponible:

http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1727-81202006000100005. [Consulta: 24 noviembre 2014]

- Rubio, R., Hernández, J. E., Mola, E. L. D. & Roca, F. 2006. Los niveles de asimilación y niveles de desempeño cognitivo. Reflexiones. . *Humanidades Médicas*. Disponible: http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1727-81202006000100005. [Consulta: 24 noviembre 2014]
- Sampieri, R. Carlos Fernández 1991. *Metodología de la Investigación*. Editorial McGraw-Hill, México. (p.54)
- Sánchez, C. & Valdez, C. 2006. Bosquejo Histórico de la actividad matemática en Cuba. *Boletín de la Sociedad Cubana de Matemática y Computación*.
- Sánchez, G., García, M. 2008. La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11.
- Santos, L. M. 1996. *Principios y Métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*, México. (p.8)
- Schoenfeld, Alan., 1991 *Ideas y tendencias en la resolución de problemas*. OMA. Argentina.
- Toledo, V. & Sabín, Y. 2014. Resultados de la disciplina Matemática 2007 - 2014. CD Agring. ISBN 978-959-250-973-3
- Toledo, V. T. 2003. *Situación actual del proceso de dirección del aprendizaje de la solución de problemas matemáticos en las escuelas secundarias del municipio San José de las Lajas de la provincia La Habana*. Master, Universidad Pedagógica Enrique José Varona.
- Triana, I. M., Triana, A. C. M., Suárez, J. S., Rodríguez, A. L., Pérez, O. A. & Espinosa, I. P. 2006. El Aprendizaje en la escuela contemporánea: Enfoques Y Perspectivas. Disponible en: <http://monografias.umcc.cu/monos/2006/cede/EL%20%20APRENDIZAJE%20>

[%20EN%20LA%20ESCUELA%20CONTEMPORNEA%20ENFOQUES%20%20Y.pdf](#). [Consulta: 15 febrero 2015]

- Vicente, M. F. 2000. *La Resolución de Problemas en la estructuración de un sistema de Habilidades Matemáticas en la escuela media cubana*. Doctorado, instituto superior pedagógico "Frank País García".
- Vigotsky, L. S (1979) *Escuela Histórico Cultural*. La Habana, Pueblo y Educación
- 2015.*Revista Mexicana: Matemática para todos*, XXI. Disponible en <http://.umcc.cu/monos/2006/cede/ENFOQUES%20%20Y.pdf>. [Consulta: 20 febrero 2015].

ANEXOS

Anexo 1: Resultados de promoción para la carrera Ingeniería Agrícola por cursos.

	2010 - 2011			2011 - 2012			2012 - 2013			2013 - 2014			2014 - 2015		
	MI	A	%	MI	A	%	MI	A	%	MI	A	%	MI	A	%
M I	39	15	38,5	52	19	36,5	62	51	82,3	57	45	78,9	42	28	66,67
MII	24	16	66,7	41	19	46,3	56	49	87,5	49	42	85,7	39	16	41,02
AL y GA	39	21	53,8	52	39	75	62	57	91,9	57	49	86	42	33	78,57

Fuente: Elaboración Propia.

Anexo 2. Calidad de cada asignatura.

	2010 - 2011	2011 - 2012	2012 - 2013	2013 - 2014	2014 - 2015
M I	2,33	2,5	2,96	2,96	2,90
M II	2,83	2,53	3,25	3,04	2,53
AL y GA	2,92	3,05	3,3	3,21	3,12

Fuente: Elaboración Propia.

Anexo 3: Procedencia y grado científico de los profesores entrevistados.

Entrevistado	Enseñanza que labora	Master	Doctor
1	Metodólogo	1	
2	Metodólogo		
3	Metodólogo	1	
4	Preuniversitario	1	
5	Preuniversitario	1	
6	Preuniversitario		
7	Preuniversitario	1	
8	Pedagógico	1	
9	Pedagógico	1	
10	Pedagógico	1	
11	Pedagógico	1	
12	Pedagógico	1	
13	Pedagógico		
14	Carrera de perfil Técnico	1	
15	Carrera de perfil Técnico		1
16	Carrera de perfil Técnico		1
17	Carrera de perfil Técnico	1	
18	Carrera de perfil Técnico		1
19	Carrera de perfil Técnico		
20	Carrera de perfil Técnico	1	
21	Carrera de perfil Técnico	1	
22	Carrera de perfil Técnico		
23	Carrera de perfil Técnico	1	
24	Carrera de perfil Técnico	1	
25	Carrera de perfil Técnico		1
26	Carrera de perfil Técnico	1	
27	Carrera de perfil Técnico		
28	Carrera de perfil Técnico		1
Total		17	5

Fuente: Elaboración Propia.

Anexo 4: Entrevista dirigida a los profesores.

Este cuestionario está dirigido a profesores de los distintos niveles de enseñanza con el objetivo de obtener información sobre el conocimiento y utilización de los niveles de desempeño cognitivo en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática, así como su valoración empírica acerca de las mayores dificultades que se presentan en el proceso de enseñanza aprendizaje de la trigonometría, parte de un trabajo de investigación de una tesis de maestría.

En esta entrevista no existen respuestas correctas ni incorrectas. La información que usted proporcione será manejada con discreción, sólo por el investigador por lo que le pedimos que responda lo más sinceramente posible.

Datos Generales.

Enseñanza en la que labora: _____

Edad: _____ Género: _____

Años de experiencia. _____

Categoría Científica: _____

- 1) ¿Utiliza usted en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática los niveles de desempeño cognitivos?
- 2) ¿Conoce usted como pueden contribuir los niveles de desempeño cognitivo en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática?
- 3) ¿Qué dificultades ha detectado usted en los estudiantes durante el proceso de enseñanza de la trigonometría?

Muchas Gracias.

Anexo 5: Ejercicios teniendo en cuenta los niveles de desempeño cognitivos en Trigonometría:

Nivel I:

1. Calcula:

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) - 2\cot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)}$$

2. Halle la derivada de segundo orden de la función:

a) $Y = \sin x$

b) $Y = \tan x$

3. Calcule los límites siguientes:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$$

4. Calcule los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\tan x}{x}$$

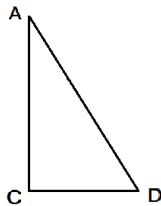
5. Calcule

$$\int \cos x \, dx$$

$$\int \sin x \, dx$$

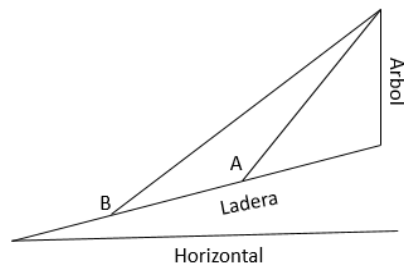
$$\int \tan x \, dx$$

6. En triángulo ACD rectángulo en C, AC=15 cm. El ángulo A tiene una amplitud de 30° . Calcule la longitud de los lados AD y CD

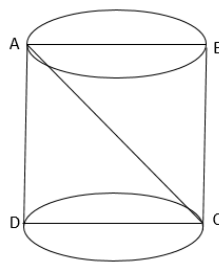


Nivel II:

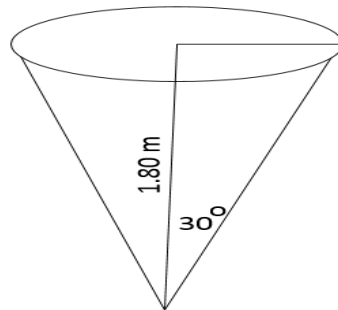
1. Un globo de aire caliente se eleva verticalmente y es seguido por un observador, que se encuentra a 500 ft del punto de lanzamiento. En el momento en que el ángulo de elevación del observador es $\frac{\pi}{4}$, el ángulo aumenta a razón de 0.14 rad/min. ¿Qué tan rápido se eleva el globo en ese instante?
2. En la cima de una ladera crece un árbol, a cierta distancia del árbol desde el punto A su cúspide se observa con un ángulo de elevación de 60° y 100 m más abajo (desde el punto B) dicha cúspide se observa con un ángulo de 15° . Halla la distancia de este último punto a la cúspide del árbol.



3. Se tiene un tanque en forma cilíndrica para el almacenaje de fertilizante. Se conoce que la base del tanque tiene un perímetro de 15.7 dm, los diámetros de las bases son paralelos y forman el rectángulo ABCD, la diagonal interior del rectángulo ABCD tiene una inclinación de 55° respecto a la base del cilindro. ¿Qué tiempo se demorará en llenar el depósito si se bombea agua a una velocidad a razón de 2 L/min?



4. Se tiene en elevados un depósito conformado por una base en forma de cono invertido sobre el cual está un cilindro circular recto de igual altura que el cono y cuya base coincide con la del cono. Si la altura del cono es de 1.80m y el ángulo que forma la generatriz del cono con dicha altura es de 30° . Calcule la velocidad con que sube el nivel del agua cuando la profundidad alcanza un metro.

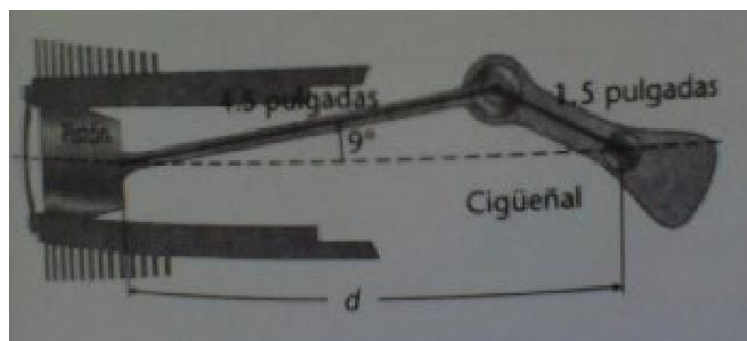


5. Desde lo alto de un edificio C se observan dos autos A y B en sentidos contrarios con ángulos de depresión 60° y 75° respectivamente.

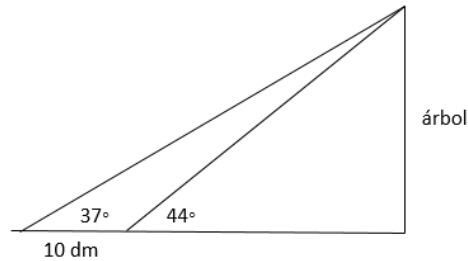
La distancia CA es de 80 m.

- Halle la distancia entre los autos.
- Halla la altura del edificio.

6. Un pistón de 5.4 pulgadas se une por medio de una barra con un pistón de 1.5 pulgadas del cigüeñal (véase la figura) ¿A qué distancia del centro del cigüeñal esta la base del pistón (distancia d) cuando la barra forma un ángulo de 9° con la línea central? El problema tiene dos respuestas.



7. Para realizar la medición de un árbol se realiza el siguiente análisis.



Calcule la altura del árbol teniendo en cuenta los datos de la figura.

8. Halle la derivada de la función:

a) $y = \left(\frac{\cos(x-1)}{\cos(2x+3)} \right)^3$ b) $y = \sin(x^4 + 3x)(\tan x)^2$ c) $8xy + \cos y = 16y^2$

9. Demuestre que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0.$$

10. Hallar la ecuación de la tangente a la función $y = \sin 3x + \cos x$ en el punto

$$x = \frac{\pi}{6}.$$

11. Un tractor ara la tierra en línea recta a una velocidad de 15 km/h. en el mismo terreno a una distancia de 20m del surco realizado por el tractor, se ubica un campesino que analiza el trabajo realizado. ¿A qué velocidad gira la vista el campesino cuando el tractor se encuentra a 16 m del punto del surco más cercano del campesino?

12. Trace la curva de ecuación $y = \sin^2 x - 2 \cos x$

13. Calcule $\int \tan^5 x \sec^7 x \, dx$ $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2} \, dx$

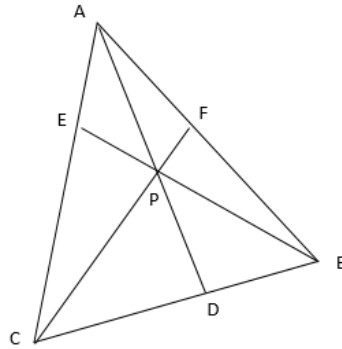
14. Encuentre la ecuación canónica de la siguiente ecuación de segundo grado:

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2 = 0$$

15. El área de la base de un cono es $50\pi \text{ cm}^2$. Sabiendo que la generatriz del cono forma un ángulo de 30° con la altura, ¿cuál es el área total del cono?

Nivel III

1. Dado el triángulo ABC y AD, BE, CF segmentos que se cortan en un punto P. Demostrar que $AF \cdot BD \cdot CE = FB \cdot DC \cdot EA$ (Teorema de Ceva).



2. Se tiene un terreno con forma de cuadrilátero convexo y se quiere saber la superficie que abarca. Demuestre que realizando las mediciones entre los vértices opuestos se obtiene que el área se puede calcular por el semiproducto de las dos mediciones por el seno del ángulo que forman entre ellas.

3. Resolver la ecuación $10^{3(x-1)} - 3 \cdot 10^{x-1} = \sqrt{3}$.

Sugerencia: $\cos 3x = 4(\cos x)^3 - 3\cos x$.

4. Calcule la siguiente integral:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(4x^3 - 24x + 27)^3}}$$

Anexo 6:

Encuesta. Evaluación de los ejercicios teniendo en cuenta los niveles de desempeño cognitivo.

Marque con una cruz la valoración que usted tiene de los ejercicios antes presentados, teniendo en cuenta su agrupación según los niveles de desempeño cognitivo.

Ejercicios del Nivel I	Muy Adecuado	Bastante Adecuado	Adecuado	Poco Adecuado	No Adecuado
1					
2					
3					
4					
5					
6					

Ejercicios del Nivel II	Muy Adecuado	Bastante Adecuado	Adecuado	Poco Adecuado	No Adecuado
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					

Ejercicios del Nivel III	Muy Adecuado 5	Bastante Adecuado 4	Adecuado 3	Poco Adecuado 2	No Adecuado 1
1					
2					
3					
4					

Muchas gracias por su colaboración.