

PRÁCTICA 1

DESCRIPCIÓN GENERAL DEL PROGRAMA

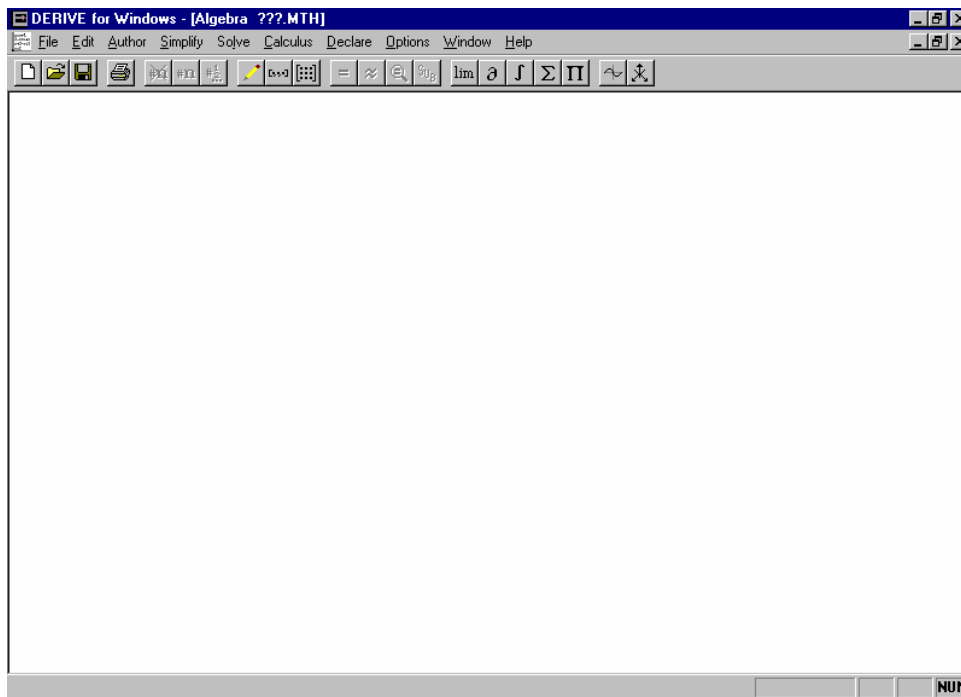
DERIVE PARA WINDOWS

En esta práctica se introducen las técnicas básicas para utilizar el programa DERIVE para WINDOWS (Versión 4.04). Por simplicidad, utilizaremos la palabra DERIVE a lo largo de todas las prácticas para referirnos al programa.

Para entrar en el programa hacer doble click (con el botón izquierdo del ratón) sobre el icono DERIVE:



y aparecerá la siguiente pantalla:



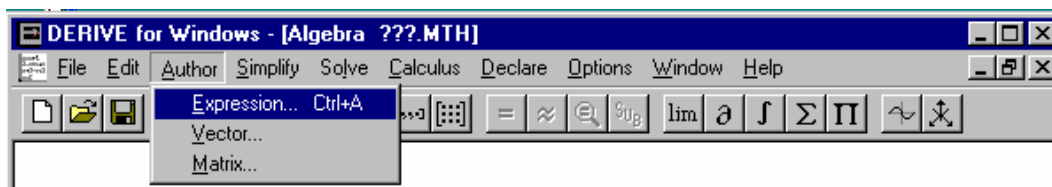
Dicha ventana consta de: la barra de título, la barra de menú, la barra de herramientas, una zona en blanco, denominada ventana de Álgebra, y por último, la línea de status (que indica el estado en el que se encuentra el programa).

Una forma sencilla de iniciarse en el programa es consultar la ayuda. En DERIVE accedemos a la ayuda eligiendo la opción **Help** del menú principal o pulsando la tecla **F1**.

Otra tecla de vital importancia es la tecla **ESC**; con ella se puede salir de cualquier situación no deseada, pulsándola tantas veces como sea necesario.

Para salir del programa habrá que seleccionar el comando **Exit** contenido en **File**.

En la parte superior de la pantalla aparecen las opciones que conforman el menú principal. Al situar el puntero del ratón sobre cualquiera de estas opciones, y pulsando con el botón izquierdo, se despliega un submenú con los distintos comandos que podemos utilizar. También es posible seleccionar las opciones del menú principal pulsando la tecla **ALT** y simultáneamente la letra subrayada en el nombre de la opción elegida. Por ejemplo: **ALT+A** desplegará el submenú de **Author**:



Este menú contiene tres comandos: Expression, Vector y Matrix. Cualquiera de ellos puede seleccionarse con el ratón.

INTRODUCIR EXPRESIONES

Seleccionando **Expression** aparece la siguiente ventana de diálogo en la que debemos escribir las expresiones matemáticas utilizando los operadores: +, -, *, /, ^ (potenciación), ! (factorial), y cualquiera de los símbolos que aparecen en la ventana

El producto (*) puede omitirse o sustituirse por un blanco. Para agrupar expresiones se usarán paréntesis (), nunca corchetes [] ni llaves {}.



Al pulsar el botón **OK** o la tecla ↵ la expresión introducida aparecerá en la ventana de Álgebra precedida de un número que la identificará.



Todas las expresiones introducidas o creadas en una sesión pueden referenciarse por su número para ser modificadas o para combinarse formando expresiones más complejas.

Ejercicio 1: Introduce la expresión $x/2+x/4$ y observa cómo es añadida en la ventana de Álgebra y resaltada en otro color.

SIMPLIFICAR EXPRESIONES

Para simplificar cualquier expresión debemos hacerlo en el momento en que la introducimos pulsando la opción **Simplify** en la ventana **Author Expression** o, si ya está en la ventana de Álgebra, la seleccionamos y elegimos del menú principal la opción **Simplify / Basic**.

Ejercicio 2: Simplifica la expresión $x/2+x/4$, que aparece en la ventana de Álgebra.

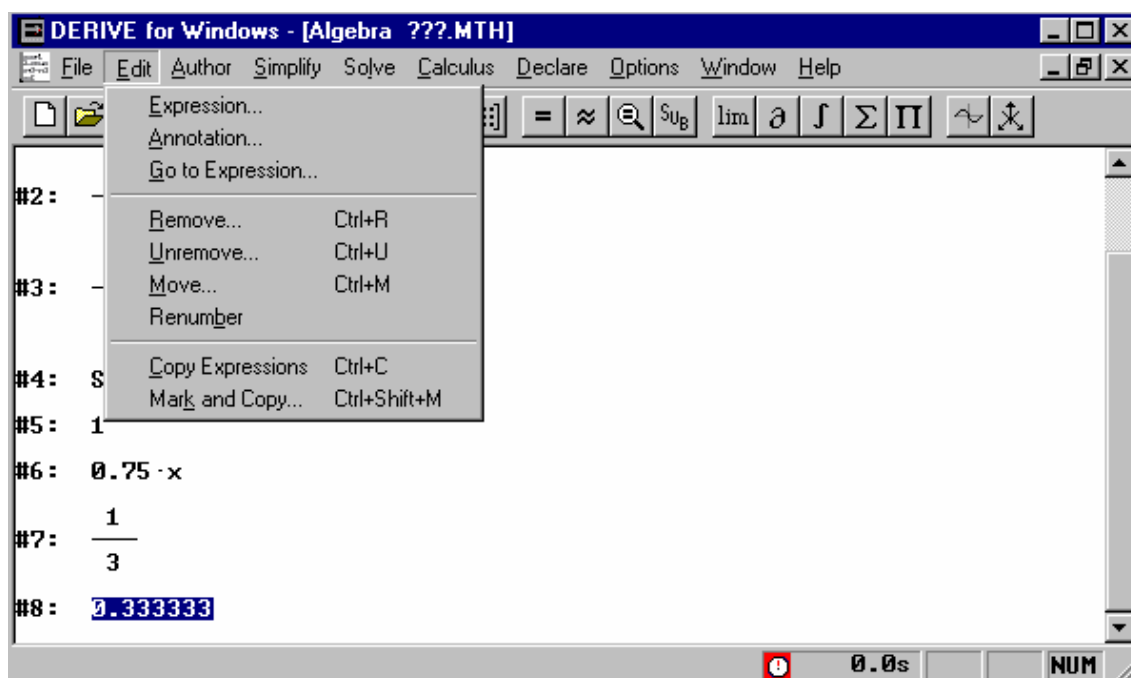
Ejercicio 3: Introduce y simplifica (dentro de Author Expression) la expresión $\sin^2(x)+\cos^2(x)$. Observa que en la ventana de Álgebra solamente aparece un 1, es decir, la expresión simplificada.

Ejercicio 4: Simplifica la expresión $x/2+x/4$, que aparece en la ventana de Álgebra, utilizando el comando **Simplify / Approximate**, pulsando el botón **Approximate**.

Ejercicio 5: Simplifica la expresión $1/3$, utilizando **Simplify/Basic** y **Simplify/Approximate**. Observa los diferentes resultados.

BORRAR Y RENUMERAR EXPRESIONES

La opción **Edit** del menú principal contiene los comandos que nos permiten: seleccionar, borrar, mover y renumerar expresiones. También podemos recuperar en la línea de edición Author Expression cualquier expresión seleccionada, o averiguar de dónde procede, por ejemplo, saber si es el resultado de simplificar otra.

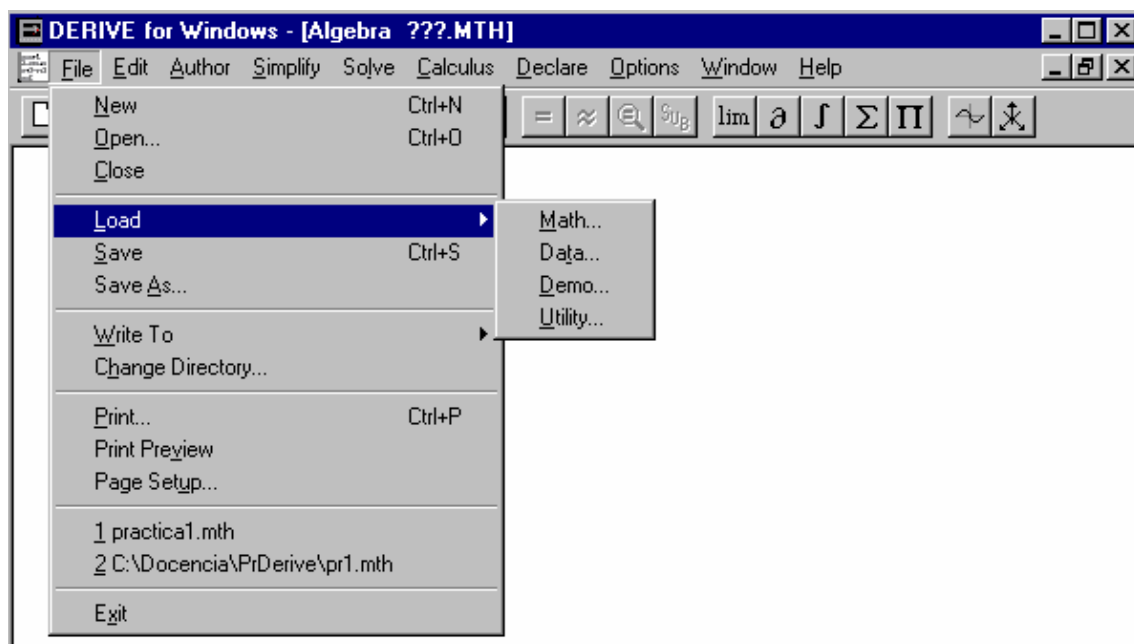


Ejercicio 6: Averigua de dónde procede el 0.333333 utilizando **Annotation**. Haz lo mismo con las expresiones $0.75x$ y 1 .

Ejercicio 7: Borra las tres primeras expresiones de la ventana de Álgebra y renumera después las restantes. Coloca la última de tus expresiones en la segunda posición.

GUARDAR Y RECUPERAR EXPRESIONES

Desde la opción **File** del menú principal se accede a distintos mandatos que permiten guardar/recuperar expresiones en/desde ficheros.



- File / **New**, crea un nuevo documento de Álgebra.
- File / **Open**, permite abrir un fichero con expresiones y cargarlo en una ventana de Álgebra.
- File / **Close**, cierra la ventana de Álgebra actual.
- File / **Load / Math**, permite abrir ficheros con expresiones matemáticas y **añadirlos** a la ventana de Álgebra actual.
- File / **Load / Utility**, permite cargar en memoria subrutinas necesarias para realizar determinadas operaciones matemáticas. A medida que las vayamos necesitando iremos viendo cuáles son los ficheros que las contienen. Las expresiones almacenadas en estos ficheros no aparecen en la ventana de Álgebra.

- File / **Save-As**, permite guardar el contenido de Álgebra en un fichero. DERIVE sugiere guardar el fichero en el directorio llamado MATH, pero se puede elegir otro de los que aparecen, o crear un directorio nuevo donde almacenarlo. La extensión por defecto de los ficheros guardados con esta opción es ".mth".
- File / **Print**, permite imprimir todas o parte de las expresiones de la ventana de Álgebra.

Ejercicio 8: Guarda el contenido de Álgebra en un directorio llamado Prácticas y bajo el nombre de Práctica1.mth. Observa el cambio producido en la barra del título de la ventana. Cierra la ventana de Álgebra.

Ejercicio 9: Abre una nueva ventana de Álgebra e introduce algunas expresiones. A continuación abre el fichero creado en el ejercicio anterior con la opción Open. Comprueba, eligiendo la opción **Window** del menú principal, que en este momento tienes abiertas varias ventanas de Álgebra. Observa cómo es posible cambiar de una a otra seleccionándolas con el ratón.

Ejercicio 10: Añade, a las expresiones que acabas de introducir en el ejercicio anterior, las que había en el fichero Práctica1.mth, utilizando File / **Load / Math**.

TECLAS Y SIMBOLOS ESPECIALES

En el teclado de tu ordenador:

Retroceso	Borra el carácter situado a la izquierda del cursor.
Del (Supr)	Borra el carácter sobre el que se encuentra el cursor.
↵ (Return)	Introduce la expresión.
Insert	Cambia de modo sobreescritura a modo inserción.
↑ + ↓↑	Resaltan, respectivamente, la expresión inferior y superior a la actualmente marcada. También podemos seleccionarlasm con el ratón.
↑ + →←	Resaltan los sucesivos operandos de un operador y permiten moverse entre subexpresiones de un mismo nivel. También podemos seleccionarlasm con el ratón.
Esc	Vuelve a la situación anterior a la última acción realizada.
F1	Accedemos a una ayuda sobre DERIVE para Windows (Help del menú principal).
F3	Inserta en la línea (Author Expression) la expresión resaltada.
F4	Actúa como F3, pero la expresión se inserta entre paréntesis.

En la ventana de Author Expression:

$\sqrt{\text{número}}$	la raíz cuadrada de un número. Alternativas: SQRT(núm) ó Ctrl+q ,
e	el número "e". Alternativas: #e ó Ctrl + e ,
π	el número " π ". Alternativas: pi ó Ctrl + p ,
i	el número "i". Alternativas: #i ó Ctrl + i
`	operador para transponer matrices: Ctrl + t

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

- 1.- Consultar la ayuda de DERIVE y ver las constantes y funciones predefinidas (logarítmica, exponencial, trigonométricas...).
- 2.- Introducir y simplificar las expresiones siguientes. Simplificalas de nuevo utilizando la opción **Simplify / Approximate**.

	Por defecto	Approximate
a) $e^{(x^2 + 4x + 4)}$	no cambia	54.5981 $e^{(x^2 + 4x)}$
b) $e[(x+2)(x-2)]$	no cambia	no cambia
c) $e((x+2)(x-2))$	$e^{(x^2 - 4)}$	0.0183156 e^{x^2}
d) $\ln\left(\frac{e^{(x^2 + 4x + 4)}}{e^{((x+2)(x-2))}}\right)$	4 x + 8	4 x + 8
e) $\sqrt{\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x}} + \cos^2 x$	sen x	sen x
f) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)$	0	0
g) $\frac{1}{2\pi}e^{(-1/2)(x^2+y^2)}$	$\frac{e^{(-x^2/2-y^2/2)}}{2\pi}$	0.159154 $e^{(-0.5x^2-0.5y^2)}$
h) $(\sin x)(e^x-1)$	no cambia	no cambia
i) $\frac{\tan x}{x - \pi/2}$	$\frac{2 \tan x}{2 x - \pi}$	$\frac{226 \tan x}{226 x - 355}$
j) $\sin^2 x + \cos^2 x$	1	1
k) $\sin(x^2) + \cos(x^2)$	no cambia	no cambia
l) $\frac{\arcsin x}{\arctan(2x)}$	no cambia	no cambia
m) $\frac{\sin^{-1} x}{\tan^{-1} x}$	$\frac{1}{\cos x}$	$\frac{1}{\cos x}$

n)	$\frac{(at+bs)^2 + (as-bt)^2}{(ar+bq)^2 + (aq-br)^2}$	$\frac{s^2 + t^2}{q^2 + r^2}$	$\frac{s^2 + t^2}{q^2 + r^2}$
o)	$\frac{2}{1+\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$	0.618033
p)	$\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}\right)^{-1}$	$\sqrt{x} + \sqrt{2}$	$\sqrt{x} + 1.41421$
q)	14!	87178291200	8.71782 10 ¹⁰
q)	$e^{xy} \sqrt{1+x^2} \cos\left(\frac{x}{y}\right)$	no cambia	no cambia
r)	$\frac{x^3y+1}{\text{sen}xy}$	no cambia	no cambia
s)	$\frac{(px^2+(k-s)x+r)^2-(px^2+(k+s)x+r)^2}{(px^2+(k+t)x+r)^2-(px^2+(k-t)x+r)^2}$	$-\frac{s}{t}$	$-\frac{s}{t}$

- 3.- Eliminar las expresiones erróneas, si las hay, y guardar las restantes en un fichero llamado “**pr1.mth**”. Salir de DERIVE, volver a entrar y cargar el fichero “**pr1.mth**”.

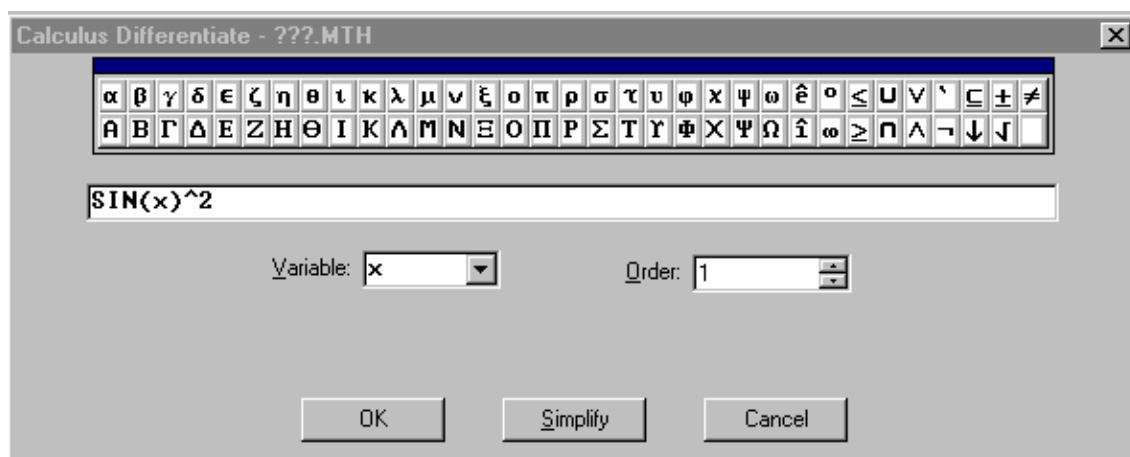
PRÁCTICA 2

DERIVADAS Y CÁLCULO DE PRIMITIVAS INTEGRAL DEFINIDA GRÁFICAS DE FUNCIONES

CÁLCULO DE DERIVADAS

Para calcular la derivada de una función, como por ejemplo $f(x) = \sin^2 x$, deberemos seguir los siguientes pasos:

1. Introducirla en **Author Expression** ($\sin^2 x$)
2. Seleccionar **Calculus / Differentiate**, e indicar en las casillas correspondientes la variable respecto de la cuál queremos derivar (x) y el orden de la derivada (1).



3. Elegir la opción **Simplify**. Si pulsamos OK, obtendremos en la ventana de Álgebra la siguiente expresión:

$$\frac{d}{dx} \sin^2(x)$$

que posteriormente tendremos que simplificar.

Si no tenemos interés en que aparezca la función a derivar en la ventana de Álgebra podemos escribirla directamente en la línea de la ventana anterior.

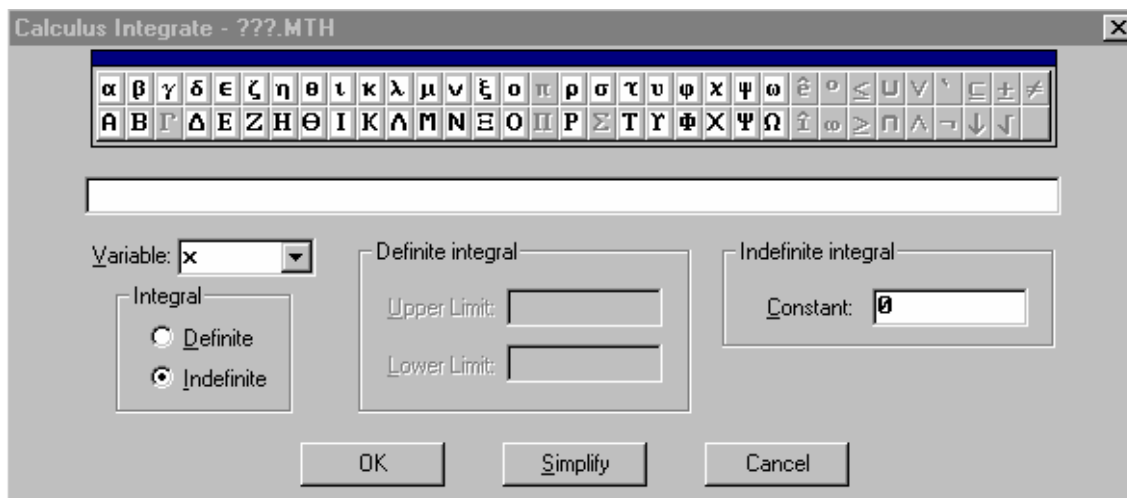
Ejercicio 1: Calcular la derivada de segundo orden de la función: $y = x^2 e^x$, y comprobar que da: $e^x (x^2 + 4x + 2)$.

CÁLCULO DE PRIMITIVAS E INTEGRALES DEFINIDAS

Para calcular la integral de una función procedemos análogamente al caso anterior pero eligiendo **Calculus / Integrate**:

- introducir la expresión: $f(x)$.
- introducir la variable de integración: x .
- podemos elegir entre calcular la integral indefinida, en cuyo caso podemos especificar la constante de integración (C , K , ...), o calcular la integral definida, teniendo que indicar los límites de integración. Si no le damos los límites de integración DERIVE entiende que se trata de una integral indefinida.

La ventana que aparece es la siguiente:



Ejercicio 2: Calcular $\int x^2 dx$

Ejercicio 3: Calcular $\int x \sin x dx$

Ejercicio 4: Calcular $\int_0^2 x^2 dx$ y $\int_0^2 x \sin x dx$

Ejercicio 5: Calcular $\int_2^0 x^2 dx$ y $\int_2^0 x \sin x dx$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

DERIVE es capaz de representar funciones de una y dos variables en ventanas denominadas "2D-Plot" y "3D-Plot", respectivamente. En esta práctica vamos a ocuparnos solamente de las gráficas en 2 dimensiones, es decir de funciones $y = f(x)$.

Vamos a ver cómo dibujar y manipular gráficas siguiendo un ejemplo. Consideremos la función $y = x^3 + x^2$:

1. introducimos la expresión $x^3 + x^2$ en **Author Expression**,
2. seleccionamos **Window / New 2D-Plot Window**, se abrirá una ventana de dibujo '2D-Plot'. En este momento tenemos 2 ventanas: 'Álgebra' y '2D-plot'. Para trabajar con las dos:
 - podemos movernos de una ventana a otra seleccionándola en el menú de Window o,
 - representar las dos a la vez eligiendo **Window / Tile Vertically** (Horizontally). Para cambiar de una ventana a otra basta con seleccionarla con el ratón.
3. seleccionamos **Plot!** en el menú de la ventana '2D-plot'.

Ejercicio 6: Representar gráficamente la función $f(x) = \sin x$

Comprueba que la función que se representa en '2D-plot' es siempre la que aparece resaltada en la ventana 'Álgebra'.

Observa que en la barra de estado de la ventana '2D-plot' se muestra la siguiente información:

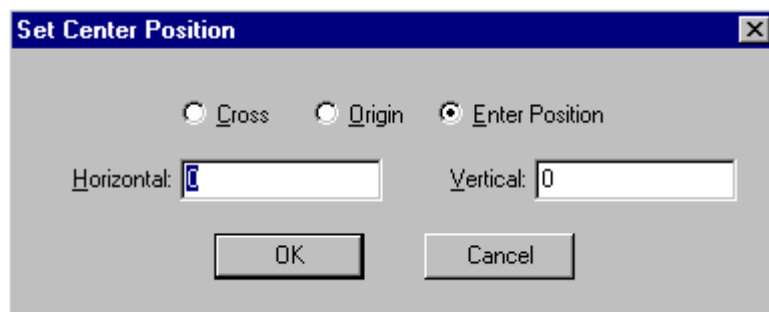
- **Cross**, indica las coordenadas del punto en el que se encuentra el símbolo $+$. Este símbolo podemos moverlo a cualquier otro punto pinchando con el ratón, o bien pulsando $\uparrow\downarrow\rightarrow\leftarrow$ o $\text{Ctrl} + \uparrow\downarrow\rightarrow\leftarrow$ si queremos desplazarnos más rápidamente.
- **Center**, indica las coordenadas del centro de la ventana.
- **Scale**, muestra la escala en la que se ha dibujado la gráfica. Por defecto la escala es 1:1, es decir que la distancia unidad en el eje de las x y de las y es la misma; si fuera 1:2 la distancia unidad en el eje de las x es 2 veces la distancia unidad en el eje de las y.

ALGUNAS OPCIONES DEL MENÚ 2D-plot

Edit / Delete Plot, esta opción permite borrar:

- **First**, la primera gráfica representada;
- **Last**, la última;
- **Butlast**, todas menos la última y
- **All**, todas.

Set / Center, centra la ventana '2D-plot' en un punto concreto:



Si seleccionamos la opción:

Cross, la ventana se centra en la posición en la que se encuentre $+$.

Origin, la ventana se centra en el origen.

Enter Position, centra la ventana en el lugar que le indiquemos.

Set / Cross, centra el $+$ en el lugar que le indiquemos.

Set / Scale, permite cambiar la escala.

Set / Range, permite indicar el rango de valores de los ejes que deseamos ver en la ventana.

Options / Trace Mode, cuando esta opción está seleccionada, nos moveremos sobre puntos de la gráfica. Es muy útil para inspeccionar las curvas: detectar máximos, mínimos, puntos de inflexión, ceros de la función, etc.

Los siguientes botones del menú '2D-plot' permiten ampliar o disminuir el tamaño de la gráfica.



Ejercicio 7: Buscar los puntos en los que se anulan las funciones x^3+x^2 y $\sin x$.

Ejercicio 8: Buscar los puntos en los que se cortan ambas funciones.

Ejercicio 9: Resolver gráficamente la ecuación $\sin x = \cos x$.

Ejercicio 10: Buscar los ceros de la función $y = \sin x - \cos x$. Compara los resultados con los obtenidos en el ejercicio 9.

Ejercicio 11: Resuelve gráficamente los sistemas:

- $y - 4 = 2x, 2y + 2 = 4x$
- $y = -2x + 1, 2y + 2 = 4x$

Ejercicio 12: Busca los máximos y mínimos del siguiente polinomio:

$$x^6+2x^5-10x^4-14x^3+31x^2+20x-30$$

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

1. Un pájaro vuela una distancia de 1000 kilómetros a través del océano. En su ruta pasa por dos islas, una después de 200 km. y otra tras 700 km. Si x representa la distancia a lo largo de la ruta a un punto dado ($0 \leq x \leq 1000$), determinar la función $f(x)$ que exprese la distancia de ese punto a la isla más cercana. Representar la gráfica. Considerar también la función $g(x)$ que representa la distancia del punto x a la isla más cercana delante del pájaro. Escribir $g(x)$ algebraicamente.
2. El tamaño de una población de bacterias en el tiempo t (medido en horas) viene dado por: $p(t) = 10000 + 1000.t - 300.t^2$. Determinar:
 - (a) la población inicial,
 - (b) el crecimiento de la población en las 3 primeras horas junto con la velocidad media de crecimiento en esas 3 horas,
 - (c) ídem. 5 primeras horas,
 - (d) la velocidad de crecimiento en cualquier tiempo t .
3. Supongamos que una población crece de acuerdo con la fórmula:

$$p(t) = 30000 + 60t^2,$$
 donde t está medido en días. Calcular la velocidad de crecimiento cuando:
 - (a) $t = 2$ días, (b) $t = 0$ días y (c) $t = 5$ días.
4. Un biólogo está almacenando peces en una cierta área de agua. Cuantos más peces ponga, más competirán por los recursos existentes y, por tanto, ganarán peso más lentamente. De hecho, sabe por otros experimentos realizados previamente, que si tiene n peces, la cantidad media de peso que gana un pez en una estación viene dada por $W = (600 - 30n)$ gr. ¿Para qué valor de n se alcanza una máxima producción, en cuanto al peso de los peces?
5. El peso de un cierto stock de peces viene dado por $W = nw$, donde n es el número de peces y w el peso medio de cada pez. Si n y w cambian con el tiempo t según las fórmulas $n = 2t^2 + 3$ y $w = t^2 - t + 2$, encontrar la velocidad de crecimiento de W respecto al tiempo.
6. En un zoo, una colonia de patos constaba de 52 patos el 1 de Octubre de 1967 y de 78 patos el 1 de Octubre de 1968. ¿Cuál es la razón de crecimiento por mes?
7. Consideremos una célula esférica. Su volumen es una función del radio r : $V(r) = \frac{4}{3} \pi r^3$. Cuando r crece, V también crece, y podemos preguntar ¿cómo cambia V en relación con los cambios de r ? Supongamos que la célula pasa de tener un radio $r_1 = 5 \mu$ a $r_2 = 8 \mu$, ¿Cuál es la razón de cambio del volumen por cada μ que aumente el radio? (Una micra $= 10^{-6} \text{ m} = 1 \mu$)
8. Un grupo de personas sale a las 10 horas para realizar una caminata de 45 Km. El grupo alcanza un refugio a 31 Km. del punto de partida a las 17,30 horas. Allí hacen noche. A las 8 horas de la mañana siguiente el grupo continúa la marcha y llega a su

meta a las 11 horas. La velocidad media del 2º día ¿es mayor o menor que la del 1º?
¿Cuál es la velocidad media de toda la marcha?

9. Una población de tamaño inicial de 25.000 crece según la fórmula $N = 25.000 + 45t^2$, donde t está medido en días. Hallar la razón media de crecimiento en los intervalos de tiempo: (a) $[0,2]$, (b) $[2,10]$ y (c) $[0,10]$.

10. Hallar la cuarta derivada de:

- a) $y = e^x \sin x$
- b) $y = x^3 \ln x$
- c) $y = \sin x \cos x$

11. Hallar la función derivada de las siguientes funciones:

- a) $y = x^x$, $(x > 0)$
- b) $y = (\sin x)^{\cos x}$, $(0 < x < \pi)$
- c) $y = (\ln x)^x$, $(x > 1)$
- d) $y = (\sin x)^x$, $(0 < x < \pi)$

12. Hallar la derivada de orden 5 de las funciones:

- a) $y = a^x$
- e) $y = e^{3+4x}$
- b) $y = x^k$ $x \geq 5$
- f) $y = \sin 5x$
- c) $y = \ln x$
- g) $y = x e^x$
- d) $y = \sin x$
- h) $y = x \ln x$

13. Calcular la pendiente de la función $y = e^x \sin x$ en los puntos de abscisas $x = 0$, $x = 3$ y $x = \pi$. ¿En cuáles de estos puntos la función es creciente?

14. ¿Existe la derivada de la función $y = x^3 \ln x$ en el punto $x = -1$? Calcular la primera y segunda derivadas en el punto $x = 10$.

15. Calcular la derivada de orden tres de la función $y = \sin x \cos x$ en el punto $x = 45^\circ$.

16. Calcular las siguientes derivadas:

- a) $y = z^z \sin(bz)$, respecto de z ($z > 0$).
- b) $z = (1 + a/y)^{(y+1)}$ respecto de y ($y > 0$).

17. Si $t^2 e^{t^3}$ es la velocidad de un móvil en el instante t , calcular la distancia recorrida por dicho móvil hasta ese instante.

18. Si $t e^t$ es la aceleración de un móvil en el instante t , calcular la velocidad instantánea de dicho móvil.

19. Utilizar las capacidades del DERIVE en cuanto a representaciones gráficas de funciones para hacer los siguientes ejercicios:

- a) Calcular los máximos y mínimos locales de la función $f(x) = x^3 - 3x^2$. Calcular el máximo y mínimo global de esta función en el intervalo $[-2,3]$.
- b) ¿Tiene algún punto de discontinuidad la función $f(t) = \frac{t}{\ln t}$? Calcular $f(0)$.
¿Tiene asíntotas verticales esta función? ¿en qué puntos?
- c) Calcular los límites por la izquierda y por la derecha de $y = e^{1/x}$ en $x = 0$.
¿Tiene esta función algún máximo o mínimo relativo? ¿Tiene asíntotas horizontales?
- d) Calcular las asíntotas verticales, los máximos y mínimos locales y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.

20. Resolver las siguientes integrales:

- | | |
|---|---|
| a) $\int x \operatorname{sen} x \, dx$ | b) $\int x e^{-x} \, dx$ |
| c) $\int e^x \cos x \, dx$ | d) $\int x e^x \, dx$ |
| e) $\int \ln x \, dx$ | f) $\int x^n \ln x \, dx$ |
| g) $\int \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx$ | h) $\int \frac{dx}{(x-1)^3}$ |
| i) $\int \sqrt{1+x^4} x^3 \, dx$ | j) $\int \frac{x}{(x^2+4)^3} dx$ |
| k) $\int \frac{3x}{\sqrt[3]{x^2+3}} \, dx$ | l) $\int a^{4x} \, dx$ |
| m) $\int \frac{e^{1/x^2}}{x^3} \, dx$ | n) $\int x^2 e^{x^3} \, dx$ |
| o) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 3} \, dx$ | p) $\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx$ |
| q) $\int \cos x e^{2\operatorname{sen} x} \, dx$ | r) $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x} \, dx$ |
| s) $\int \frac{\operatorname{sen} 3x}{\cos^2 3x} \, dx$ | t) $\int e^x \operatorname{sen} x \, dx$ |
| u) $\int e^{ax} \cos bx \, dx$ | |

21. Representar y explorar gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$

b) $z = y^4 - 2y^2$

c) $y = \ln x - x$

d) $w(t) = \ln(t^2 - 3t + 2)$

e) $y = w e^{1/w}$

f) $y = \frac{x^2 + 1}{1 + x}$

g) $y = \sin x + \cos x$

h) $y = e^{-x^2/2}$

22. Calcular las siguientes integrales definidas:

a) $\int_{-2}^3 x^2 dx$

b) $\int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx$

c) $\int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx$

d) $\int_{-2}^{-1} x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x dx$

e) $\int_{-1}^0 x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x dx$

f) $\int_0^2 x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x dx$

23. Representar las dos gráficas siguientes: $f(x) = x^4 - 4x^2$ y $g(x) = -x^3 + 4x$. Observa que $f(x)-g(x)$ es precisamente la función que has integrado en los apartados **d)**, **e)** y **f)** del ejercicio anterior. Teniendo en cuenta esto, comprueba que el área encerrada por las dos curvas es $\frac{293}{30}$ unidades de área.

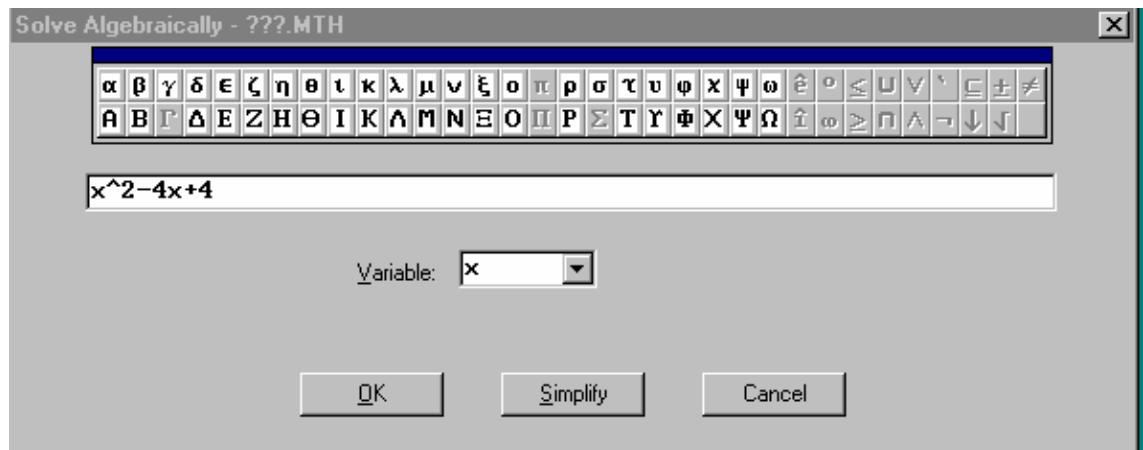
PRÁCTICA 3

ECUACIONES DIFERENCIALES

1. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CON DERIVE

Para resolver una ecuación con DERIVE podemos proceder de una de las dos maneras siguientes:

1. Introducimos la ecuación en Author Expression y seleccionamos después **Solve/Algebraically** o, directamente escribimos la ecuación en la ventana que aparece al seleccionar **Solve/Algebraically**.



2. En **Variable** indicamos la variable que queremos despejar; x en nuestro caso.
3. Pulsamos **Simplify**.

Ejercicio 1: Resuelva $x^2 + y^2 = 2x + 4$ respecto de la variable x y después respecto de la variable y .

2. ECUACIONES DIFERENCIALES

A las ecuaciones en las que aparecen funciones y derivadas de funciones se las conoce como ecuaciones diferenciales. Resolver este tipo de ecuaciones consiste en encontrar, precisamente, una función que cumpla la ecuación. Dicha función no tiene porqué ser única, sino que, puede haber infinitas soluciones, al conjunto de todas las soluciones de una ecuación diferencial se le conoce como **solución general de la ecuación**. Una **solución particular** es una función que cumple ciertas condiciones adicionales llamadas **condiciones iniciales**.

En toda esta práctica, $x(t)$ expresará la función que tenemos que encontrar, siendo t la variable independiente. Por simplicidad, las derivadas $x'(t)$, $x''(t)$, etc. se representarán también por x' , x'' , etc.

Ejemplo:

$x' + 4t = 0$ es una ecuación diferencial, en la que x' representa $x'(t)$ y $x(t)$ es la función cuyo valor queremos conocer. La solución general es $x(t) = -2t^2 + C$, donde C es una constante arbitraria. Para cada uno de los valores que demos a C obtendremos una solución distinta.

La solución particular de la ecuación diferencial que cumple $x(1) = 4$ es:
 $x(t) = -2t^2 + 6$.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES

DERIVE lleva incorporados dos **ficheros de utilidades** que contienen las funciones necesarias para poder resolver ecuaciones diferenciales:

- **ODE1.MTH** para las ecuaciones diferenciales de primer orden, es decir, aquéllas en las que la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación es la primera, y
- **ODE2.MTH** para las ecuaciones diferenciales de segundo orden, es decir, aquéllas en las que la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación es la segunda.

Estos ficheros deben cargarse en memoria antes de intentar resolver cualquier ecuación diferencial. Para ello basta con seleccionar **File/Load/Utility**, buscar la carpeta donde se encuentran los ficheros de utilidades (normalmente `c:\Dfw\MATH`) y seleccionar el fichero de utilidades (por ejemplo ODE1.MTH).

2.1 ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

DERIVE permite obtener las soluciones generales de las ecuaciones diferenciales de primer orden utilizando determinados comandos, contenidos en el fichero ODE1.MTH, cuyos nombres acaban en **_GEN**.

Las soluciones particulares se pueden calcular de la misma forma utilizando las comandos similares sin la terminación **_GEN**, añadiendo las condiciones iniciales.

Ecuaciones diferenciales lineales

Las ecuaciones diferenciales de primer orden y lineales tienen la forma:

$$x'(t) + a(t)x(t) = f(t)$$

Siendo $a(t)$ y $f(t)$, expresiones que puede depender de t .

Para calcular la solución general de este tipo de ecuaciones diferenciales, utilizamos el comando:

LINEAR1_GEN(a(t), f(t), t, x, c)

Notar que este comando (y todos los que se utilizan en esta práctica), incluye una serie de argumentos que sirven a DERIVE para identificar la ecuación diferencial:

- $a(t)$: coeficiente de $x(t)$ (se supone que el coeficiente de $x'(t)$ es 1),
- $f(t)$: término independiente,
- t : variable independiente,
- x : variable dependiente,

- c: letra para la constante arbitraria.

Ejercicio 2: Resolver la ecuación diferencial: $3x'(t) - \frac{12}{t} x(t) = 6t + \frac{12}{t}$.

En primer lugar observamos que es una ecuación diferencial lineal de primer orden. Para conseguir que $x'(t)$ tenga coeficiente 1, dividimos la ecuación por 3, obteniendo:

$$x'(t) - \frac{4}{t} x(t) = 2t + \frac{4}{t}. \text{ A continuación:}$$

1. Nos aseguramos de que el fichero ODE1.MTH ya ha sido cargado con **File/Load/Utility**.
2. Seleccionamos **Author/Expression**.
3. Introducimos en la ventana que aparece la expresión:
 $\text{LINEAR1_GEN}(-4/t, 2t + 4/t, t, x, c)$
4. Pulsamos **OK** (para que el comando quede escrito en la pantalla).
5. Pulsamos **Simplify**.

Así, obtenemos la solución general de la ecuación: $x = ct^4 - t^2 - 1$.

Para calcular la solución particular de este tipo de ecuaciones diferenciales, utilizamos el comando:

LINEAR1(a(t), f(t), t, x, t₀, x₀)

Donde los argumentos t_0 y x_0 , especifican las condiciones iniciales. Por ejemplo, si queremos que la solución cumpla $x(1)=7$, pondremos $t_0=1$ y $x_0=7$.

Ejercicio 3: Encontrar la solución particular de la ecuación diferencial del ejercicio 2 para las condiciones iniciales $x(1) = 1$.

Introducimos $\text{LINEAR1}(-4/t, 2t + 4/t, t, x, 1, 1)$ y después de pulsar **Simplify**, obtenemos: $x = 3t^4 - t^2 - 1$.

Ecuaciones diferenciales de variables separables

Las ecuaciones diferenciales de variables separables tienen la forma:

$$\frac{dx}{dt} = f(t) h(x)$$

siendo $f(t)$ una expresión que puede depender de t y $h(x)$ una expresión que puede depender de x .

Para obtener la solución general utilizamos el comando:

SEPARABLE_GEN (f(t), h(x), t, x, c)

Análogamente, utilizando el comando **SEPARABLE (f(t), h(x), t, x, t₀, x₀)** obtendremos la solución particular de la ecuación, que cumple las condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$.

Ejercicio 4: Resolver la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = (t^3 - t) x^2$.

Observamos que es una ecuación diferencial de primer orden de variables separables. Así pues, podemos resolverla introduciendo **SEPARABLE_GEN(t^3 - t, x^2, t, x, c)**.

Obtenemos la solución: $-\frac{1}{x} = c + \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2}$, en la que hay que despejar la x para obtener la función en forma explícita. Para ello, pulsar **Solve** y después **Simplify**, obteniéndose:

$$x = -\frac{4}{4c + t^4 - 2t^2}$$

Caso general de ecuaciones diferenciales de primer orden

Cualquier ecuación diferencial de primer orden se puede escribir de la siguiente forma:

$$(1) \quad p(x, t) dt + q(x, t) dx = 0$$

Donde $p(x, t)$ y $q(x, t)$ son expresiones cualesquiera que pueden depender de t y de x . Si ponemos la ecuación diferencial de esta forma, podemos obtener su solución general utilizando el comando:

$$\mathbf{DSOLVE1_GEN (p(x,t), q(x,t), t, x, c)}$$

Para hallar la **solución particular** con las condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$, podemos utilizar el comando:

$$\mathbf{DSOLVE1 (p(x,t), q(x,t), t, x, t_0, x_0)}$$

Ejercicio 5: Hallar la solución general de la ecuación diferencial $x'(t) = \frac{4t}{x(t)}$.

En primer lugar, hay que describir la ecuación diferencial según el formato (1) para poder utilizar **DSOLVE1_GEN**. Así, teniendo en cuenta que $x'(t) = \frac{dx}{dt}$, la ecuación queda: $-4t dt + x dx = 0$. Por lo tanto:

$$p(x, t) = -4t$$

$$q(x, t) = x$$

Para resolverla, introducimos: **DSOLVE1_GEN (-4t, x, t, x, c)**, y pulsamos **Simplify**, obteniendo: $\frac{x^2}{2} - 2t^2 = c$, y, después de despejar la x (**Solve**), queda:

$$x = -\sqrt{2} \sqrt{c+2t^2}, \quad x = \sqrt{2} \sqrt{c+2t^2}$$

Ejercicio 6: Comprobar que la solución particular de la ecuación diferencial del ejercicio 6 para las condiciones iniciales $x(1) = 1$, es:

$$x = \sqrt{4t^2 - 3}, \quad x = -\sqrt{4t^2 - 3}$$

2.2 ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN

La forma general de estas ecuaciones para DERIVE es:

$$(2) \quad x''(t) + p(t) x'(t) + q(t) x(t) = r(t)$$

donde $p(t)$, $q(t)$ y $r(t)$ son expresiones cualesquiera que sólo pueden depender de t . DERIVE las resuelve utilizando el comando **DSOLVE2**.

Para hallar la **solución general**, procedemos de la siguiente manera:

1. Nos aseguramos de que el fichero ODE2.MTH ya ha sido cargado con **File/Load/Utility**.
2. Introducimos en **Author/Expression**:

$$\text{DSOLVE2} (p(t), q(t), r(t), t, c, d)$$

donde:

- $p(t)$, $q(t)$ y $r(t)$ identifican la ecuación,
 - t es la variable independiente,
 - c y d son las letras que expresan las constantes arbitrarias en la solución general.
4. Pulsamos **OK** (para que el comando quede escrito en la pantalla).
 5. Pulsamos **Simplify** y obtenemos la solución.

Ejercicio 7: Obtener la solución general de la ecuación diferencial de segundo orden $3x''(t) = 3x'(t) - 3t^2 + 6t$.

En primer lugar tenemos que ponerla en la forma (2), esto es: $x''(t) - x'(t) = -t^2 + 2t$. Entonces, utilizando el comando **DSOLVE2**(-1, 0, -t^2 + 2t,

t, c, d), obtenemos la solución general: $x(t) = c e^t + d + \frac{t^3}{3}$.

Para encontrar una **solución particular** de una ecuación diferencial de segundo orden necesitamos dos condiciones iniciales.

- Si tenemos las condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$ y $x(t_1) = x_1$ utilizaremos el comando: **DSOLVE2_BV** ($p(t), q(t), r(t), t, t_0, x_0, t_1, x_1$)
- Si tenemos las condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$ y $x'(t_0) = v_0$ utilizaremos el comando: **DSOLVE2_IV** ($p(t), q(t), r(t), t, t_0, x_0, v_0$) .

Ejercicio 8: Obtener la solución general de la ecuación diferencial de segundo orden del ejercicio 7, cuando las condiciones iniciales son:

- a) $x(0)=0, x(1)=1$.
- b) $x(0)=0, x'(0)=1$.

Para el apartado (a), introducimos: $DSOLVE2_BV(-1, 0, -t^2 + 2 \cdot t, t, 0, 0, 1, 1)$,

obteniendo $\frac{2e^t}{3(e-1)} + \frac{t^3}{3} - \frac{2}{3(e-1)}$. Para el apartado (b), introducimos:

$DSOLVE2_IV(-1, 0, -t^2 + 2 \cdot t, t, 0, 0, 1)$, obteniendo $e^t + \frac{t^3}{3} - 1$.

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

- 1.- Determinar las soluciones particulares de las ecuaciones siguientes que satisfacen la condición inicial $x(0) = 1$.
 - a) $\frac{dx}{dt} = 3x$
 - b) $\frac{dx}{dt} = 1 + 2t + t^2$
 - c) $\frac{dx}{dt} = e^{-2t}$
 - d) $\frac{dx}{dt} = x + 1$

- 2.- Determinar las soluciones particulares de las ecuaciones siguientes, que satisfacen la condición inicial $x(0) = 0$.
 - a) $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}x$
 - b) $x' = t - \frac{x}{t+1} + 1$
 - c) $dx = (1+t)^3 dt$
 - d) $\frac{dx}{dt} = 2 \sin t \cos t + \cos t$

- 3.- Determinar las soluciones de la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} + 2tx = t^{2k+1} e^{-t^2}$, donde k es cualquier número positivo. Determinar la solución particular que satisface la condición inicial $x(1) = 1$.

- 4.- Una sustancia química S se produce a razón de r moles por minuto en una reacción química. Al mismo tiempo, se consume a una razón de c moles por minuto por mol de S . Definir $S(t)$ como el número de moles de la sustancia presentes en el instante t . Calcular $S(t)$ en función de $S(0)$ y demostrar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = \frac{r}{c} \text{ (ésta es la cantidad de equilibrio de la sustancia).}$$

- 5.- Determinar las soluciones particulares de las ecuaciones siguientes que satisfacen la condición inicial $x(0) = 1$.
 - a) $\frac{dx}{dt} = x (\cos t + \sin t)$
 - b) $\frac{dx}{dt} = x^2 (1+t^2)$
 - c) $\frac{dx}{dt} = t^2 (1+x^2)$
 - d) $\frac{dx}{dt} + 2x = x t^2$

- 6.-
 - a) Calcular la solución general de la ecuación diferencial $3 dx = 2t dt$.
 - b) Calcular la solución particular que cumple la condición inicial $x(1) = 1$.

- 7.- Resolver la ecuación diferencial $x'(t) = \frac{2t}{t^2 + 1}$.

- 8.- Resolver la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} + 3t$.

- 9.- En un modelo epidemiológico se introduce un solo individuo enfermo en una comunidad que contiene n individuos susceptibles de contraer la enfermedad. Definimos $x(t)$ como el número de individuos no enfermos de la población en el instante t . Si suponemos que la enfermedad se contagia a todos los individuos

susceptibles a ella, entonces $x(t)$ decrece a partir de su valor inicial $x(0) = n$ hasta 0. Una ecuación posible para $x(t)$ es

$$\frac{dx}{dt} = -rx(n+1-x),$$

donde r es una constante positiva que mide la razón de la infección. Determinar la solución de esta ecuación.

- 10.- Determinar las soluciones particulares de las ecuaciones siguientes que satisfacen las condiciones iniciales dadas:
 - a) $4x'(t) + 3x(t) = -x''(t) - x'(t) - 4x(t)$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$
 - b) $x''(t) + 3x'(t) + 3x(t) = 0$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 1$
 - c) $8x''(t) + 4x'(t) + x(t) = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 4$
- 11.- Determinar las soluciones generales de las siguientes ecuaciones:
 - a) $x''(t) - x(t) = t$
 - b) $2x''(t) + 4x'(t) = e^{-2t} + x''(t) - 4x(t)$
 - c) $y''(x) + y(x) = \sin x$
- 12.- a) Calcular la solución general de la ecuación diferencial $4x''(t) + 2x'(t) = 0$.
 b) Calcular la solución particular que cumple las condiciones iniciales $x(0)=0$ y $x'(0)=3$.
- 13.- Resolver la ecuación diferencial $y''(t) - e^t = 6y'(t) - 9y(t)$. Calcular la solución particular para las condiciones particulares $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.
- 14.- a) Calcular la solución general de la ecuación diferencial $v''(t) + v'(t) = 6 - v''(t)$.
 b) Calcular la solución particular que cumple las condiciones iniciales $v(1)=1$ y $v'(1)=1$.
- 15.- Resolver la ecuación diferencial $3x'(t) = -2x''(t) + 2x'(t)$ para las condiciones iniciales: $x(0) = 0$ y $x'(0) = 3$.
- 16.- Si la población de un país se duplica en 50 años, ¿en cuántos años será el triple, suponiendo que la velocidad de aumento es proporcional al nº de habitantes?
- 17.- En un cierto cultivo de bacterias, la velocidad de aumento es proporcional al nº presente. Si se sabe que el nº se duplica en 4 horas, ¿qué número se debe esperar al cabo de 12 horas?
- 18.- Supongamos que queremos llenar una balsa de riego de 400 m^3 de capacidad. Para ello se bombean 10 m^3 por segundo de agua de un depósito subterráneo. Sin embargo, debido a un defecto de construcción, se filtra al subsuelo a razón de un 2% del agua acumulada en ese instante.
 - a) Calcular el volumen de agua embalsada en cualquier instante t .
 - b) ¿Se llenará la balsa?. En caso afirmativo, ¿cuándo? y en otro caso, ¿hasta dónde se llenará?.

- 19.- La velocidad de crecimiento de la población en un cultivo de bacterias, en un instante t , es proporcional al número de bacterias presentes en ese instante. Si en la primera hora el tamaño de la población inicial se ha multiplicado por $3/2$, calcular cuánto tiempo es necesario, desde el instante inicial, para que la población inicial se triplique.
- 20.- La velocidad de crecimiento de una colonia de cigüeñas, en un instante t , es proporcional al número de individuos en la misma en ese instante. El crecimiento natural de la colonia se ve alterado por la llegada continua de un número constante de individuos que proceden de una reserva ornitológica. Si la constante de inmigración es la tercera parte de la constante de proporcionalidad y ésta es igual a 2, determinar el tamaño de la colonia en cualquier instante.
- 21.- La aceleración, en un instante t , de un proyectil es igual a la décima parte de su velocidad instantánea más dos centésimas del espacio recorrido más 50 unidades. Plantear una ecuación diferencial que se ajuste al modelo y encontrar el espacio recorrido por el proyectil en función del tiempo.
- 22.- Unas 435 lubinas rayadas (*Roccus saxatilis*) del Océano Atlántico fueron arrojadas a la bahía de San Francisco en 1879. En 1899 las capturas comerciales netas fueron de 1.234.000 libras. Supongamos que el peso medio de una lubina es una libra y que en 1899 fueron capturados uno de cada diez peces. El crecimiento de la población fue tan rápido que es razonable establecer la suposición de que la velocidad de crecimiento es proporcional al número de lubinas de la población.
Plantear la ecuación diferencial cuya solución permita averiguar el número de lubinas en cualquier instante t . ¿Cuántas lubinas habrá en el año 2000?
- 23.- En una ciudad con 2000 habitantes, la propagación de una epidemia de gripe satisface la ecuación diferencial $y'(t) = 0.002 y(t) (2000 - y(t))$, donde $y(t)$ es el número de personas contagiadas en el instante t (medido en semanas). Si inicialmente hay dos personas contagiadas, encontrar el número de personas contagiadas en cualquier instante t . ¿Cuánto tiempo pasará hasta que los $3/4$ de la población esté contagiada?
- 24.- Según la ley de Newton, la velocidad de enfriamiento de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la del medio que lo rodea. Un termómetro que marca la temperatura de una habitación se lleva al exterior, en donde la temperatura del aire es de 5°F . Después de un minuto el termómetro marca 55°F y después de 5 minutos marca 30°F . ¿Cuál es la temperatura que inicialmente señalaba el termómetro?

PRÁCTICA 4

CÁLCULO MATRICIAL.

**RESOLUCIÓN DE
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES**

DECLARACIÓN DE MATRICES

DERIVE permite declarar matrices de dos maneras distintas:

- como una expresión con una sintaxis especial desde **Author / Expression**, o
- desde **Author / Matrix**.

Veamos cómo hacerlo utilizando un ejemplo. Supongamos que queremos introducir la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Si utilizamos **Author / Expression**, teclearemos `[ [-1, 4, 3], [0, 2, 1] ] + OK`. Es decir, la sintaxis para declarar matrices es:

$$\begin{aligned} & [[a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}], \dots, [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}], \dots, [a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}]] \\ & [[\text{fila1}], \dots, [\text{fila } i], \dots, [\text{fila } m]] \end{aligned}$$

Si utilizamos **Author / Matrix** el programa abre una ventana en la que nos pregunta el número de filas (Rows) y de columnas (Columns) de la matriz que queremos introducir y, a continuación, aparece la siguiente ventana en la que introduciremos los elementos de la matriz:

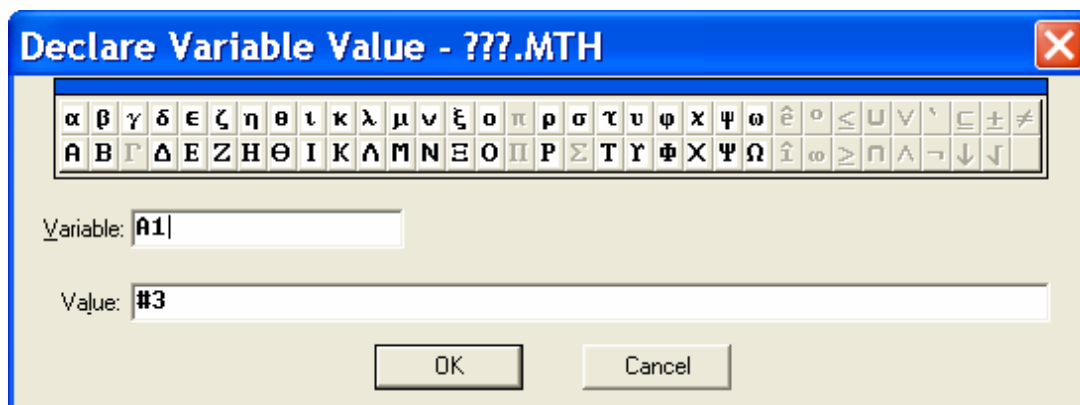
Para pasar de una casilla a otra utilizaremos los tabuladores.

Si la matriz contiene algún elemento susceptible de ser simplificado, pulsaremos **Simplify**; en caso contrario basta con pulsar **OK**.

DARLE NOMBRE A UNA MATRIZ

Si tenemos una matriz que va a ser utilizada en operaciones o cálculos posteriores conviene representarla de alguna forma concisa para evitar trabajar con ella explícitamente, sobre todo cuando ésta es de dimensión elevada. Para ello tenemos dos opciones: representarla directamente por medio del número y el símbolo # que tiene asociado (por ejemplo #3, si está en esa posición) o bien darle un nombre.

Para dar un nombre a una matriz usamos **Declare / Function** o **Declare/Variable Value**, dependiendo de si la matriz tiene elementos variables o no. Se recomienda que el nombre que se asigne conste de, al menos, una letra y un número. Por ejemplo, si la matriz que hemos introducido anteriormente tuviese asociado el número 3 y quisiéramos darle el nombre A1, tras elegir **Declare / Variable Value** rellenaríamos la ventana que aparece de la siguiente manera:



Tras pulsar OK aparece una nueva expresión en la que la matriz queda identificada con el nombre A1. A partir de este momento, podemos hacer referencia a la matriz utilizando su nombre.

Ejercicio 1: Introducir la siguiente matriz, darle el nombre $f(t)$ y calcular $f(0)$ y $f(\pi)$.

$$\begin{pmatrix} -t & 4 & 3 \\ 0 & \sin t & 1 \end{pmatrix}$$

Una vez declarada una expresión, permanecerá durante toda la sesión. Si queremos eliminar la declaración, basta con declarar el nombre utilizado como variable real entrando en **Declare / Variable Domain**.

MODIFICAR ELEMENTOS DE UNA MATRIZ

Para modificar el elemento a_{ij} de la matriz A realizamos los siguientes pasos:

1. Seleccionar la matriz.
2. Utilizar F3 para trasladarla a la línea de **Author/Expression**.
3. Situar sobre el elemento a_{ij} y cambiarlo.
4. Pulsar OK.

MATRIZ IDENTIDAD

Para declarar una matriz identidad de orden n , tecleamos en la línea de **Author/Expression**:

IDENTITY_MATRIX (n)

Si queremos ver la matriz en la forma usual tenemos que simplificar la expresión. Por ejemplo, tras simplificar la expresión: **IDENTITY_MATRIX (2)**, obtenemos: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

OPERACIONES CON MATRICES

Para realizar cualquier operación con matrices podemos utilizar: las matrices explícitamente, los números de las expresiones asociadas o los nombres de las matrices. Las operaciones que se pueden hacer con matrices y sus respectivos operadores son:

- Suma + $A + B$
- Resta - $A - B$
- Producto $\cdot$ $A \cdot B$, $\lambda \cdot A$
- Potencia $^$ A^2
- Invertir $^{-1}$ A^{-1}
- Trasponer $'$ A'

Recordar que para ver el resultado de cualquier operación debemos simplificar la expresión asociada utilizando el comando **Simplify**.

!!!! Cuidado con las dimensiones !!!!

DERIVE no comprueba si las dimensiones de las matrices son las adecuadas para que la operación sea matemáticamente correcta. Si no lo son, Derive no simplificará la expresión o, si lo hace, dará un resultado impredecible y absurdo.

CÁLCULO DE DETERMINANTES, MENORES Y ADJUNTOS

Para calcular el determinante de una matriz cuadrada, A , introducimos la expresión **DET(A)** y simplificamos.

Ejemplo: **DET([[-1, 4, 3], [0, 2, 1], [5, 7, 0]])** = -3

Para poder calcular menores y adjuntos de una matriz, necesitamos cargar el archivo **VECTOR.MTH** desde **File / Load / Utility** que contiene, entre otras, las funciones:

MINOR(A, i, j) extrae la submatriz de la matriz A que se obtiene borrando la fila i y la columna j de A .

ADJOINT(A) muestra la traspuesta de la matriz de adjuntos de A .

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Para resolver un Sistema de Ecuaciones Lineales podemos proceder de dos modos:

- escribimos en **Author/Expression**:
 $\text{SOLVE} ([1^{\text{a}} \text{ ecuación}, 2^{\text{a}} \text{ ecuación}, 3^{\text{a}} \text{ ecuación}, \dots], [x, y, z, \dots])$
 y simplificamos, o
- seleccionamos, desde el menú principal, **Solve / System**, nos pedirá el número de ecuaciones del sistema y aparecerá una ventana donde introducir tanto las ecuaciones como las variables.

Ejercicio 2: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 5 \\ -x - 2y + 3z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

Método 1: $\text{SOLVE} ([2x+y-2z = 5, -x-2y+3z = 2, x+y-z = 0], [x, y, z])$
Simplify

Método 2: seleccionamos *Solve / System*, especificamos 3 ecuaciones y, en la ventana que aparece, introducimos las tres ecuaciones junto con las incógnitas a considerar:

The screenshot shows the DERIVE software interface. At the top, there are three input fields for equations, numbered 1, 2, and 3. Equation 1 is $-2 \cdot z + y + 2 \cdot x = 5$, Equation 2 is $-x - 2 \cdot y + 3 \cdot z = 2$, and Equation 3 is $x + y - z = 0$. Below these fields, there is a section labeled "Equation Variables" with a blue box containing the variables x , y , and z .

Obteniendo en ambos casos: $x = \frac{7}{2}$, $y = -5$, $z = \frac{-3}{2}$

Dependiendo de si el número de ecuaciones es igual, o no, al número de incógnitas, el programa actuará de diferentes maneras:

- si el número de incógnitas es menor o igual que el número de ecuaciones, DERIVE resuelve directamente el sistema,
- si el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones, DERIVE nos pedirá cuáles son las incógnitas cuyo valor queremos conocer, su valor vendrá dado en función del resto de incógnitas del problema.

NOTA:

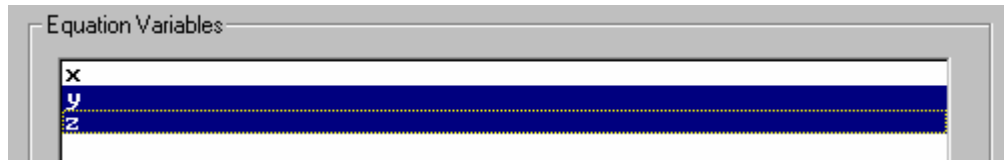
- Si el sistema es incompatible, DERIVE devuelve un corchete vacío.
- Si el sistema es compatible indeterminado, DERIVE da la solución en función de los parámetros @1, @2, @3 ...
- Las variables en DERIVE sólo constan de una letra como x, y, ... Si queremos utilizar variables que usen más de un carácter como x1, x2, ... debemos declararlas previamente con **Declare / Variable Domain**, indicando el nombre de la variable y su dominio, real, $(-\infty, \infty)$.

Ejercicio 4: Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + 4z = 3 \\ x - z = 2 \end{cases}$$

Si queremos despejar el valor de las variables z e y en función de x , deberemos especificar estas variables, en cualquiera de los dos métodos:

1. $SOLVE ([2x-y+4z = 3, x-z = 2], [y, z])$, o
2. escribir las 2 ecuaciones y seleccionar y, z



El resultado que obtendríamos sería: $[y = 6x - 11, z = x - 2]$

Ejercicio 5: Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = a \\ 3x + 4y + 5z = b \\ 4x + 5y + 7z = c \end{cases}$$

(Solución: $x = -3a+b+c$, $y = a+2b-2c$, $z = a-2b+c$)

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

1.- Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Calcular: $A + B$, $A - B$, $A + 2 \cdot B$, $3 \cdot A - B$, A^t , $(A^t)^t$, $A - (A^t)^t$, $\det(A)$, A^d , $(A^d)^t$, A^{-1} , $A \cdot B^t$, $A \cdot B$, $(A \cdot B)^{-1}$, $A^{-1} \cdot B^{-1}$ y $B^{-1} \cdot A^{-1}$. Observar que $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

2.- Sean las matrices A y B. Calcular, de las siguientes operaciones, aquéllas que sean posibles: $A \cdot B$, $B \cdot A$, $A \cdot A^t$, $A^t \cdot A$, $B \cdot B^t$ y $B^t \cdot B$. Establecer el orden de las matrices resultantes y justificar porqué algunas no se pueden realizar. Comprobar que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

3.- Recuento de helechos.

Un bosque fue dividido en pequeños cuadrados de 1 m^2 de área llamados *cuadros*. Se contó el número de helechos por cuadro y el resultado se dio en forma matricial:

nº de helechos por cuadro

$$f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

nº de cuadros

$$q = \begin{pmatrix} 23 \\ 17 \\ 8 \\ 6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

es decir, hay 23 cuadrados con 0 helechos, 17 cuadrados con 1 helecho, etc. Hallar el número total de helechos que se contaron en el bosque realizando una operación matricial adecuada.

4.- Ecosistema con especies competitivas.

Consideremos un ecosistema que contiene 3 especies competitivas. Definimos la matriz de orden 3×3 , $A = (a_{ij})$ en la cual a_{ij} es la cantidad media de animales de la especie j consumidos por un animal de la especie i en un día. ¿Qué puedes deducir de las 3 especies si la matriz que describe la relación entre ellas es:

a.-
$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

b.-
$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ?$$

Supongamos que la digestión de una unidad de la especie i produce r_i calorías al depredador. Definimos el vector r de orden 3×1 como el vector cuya componente i es r_i . Dar una interpretación biológica de las componentes del vector producto $A \cdot r$.

5.- Contacto de primer y segundo orden en una enfermedad contagiosa.

Supongamos que 3 personas han contraído una enfermedad contagiosa. A un grupo de 6 personas se les pregunta si han estado en contacto con alguna de las 3 personas infectadas, y a los miembros de un tercer grupo de 5 personas se les pregunta si han estado en contacto con alguna de las 6 del segundo grupo. Los contactos directos (o de primer orden) entre los grupos pueden describirse utilizando las siguientes matrices: $A = (a_{ij})$, de orden 3×6 , donde $a_{ij} = 1$ si la persona j del segundo grupo ha tenido contacto con la persona i del primer grupo, y $a_{ij} = 0$ en otro caso. Análogamente, definimos la matriz $B = (b_{ij})$ de orden 6×5 , donde $b_{ij} = 1$ si la persona j del tercer grupo ha tenido contacto con la persona i del segundo grupo, y $b_{ij} = 0$ en otro caso.

Por ejemplo, si A y B son las siguientes matrices,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tenemos $a_{24} = 1$, lo que significa que la 4ª persona del segundo grupo ha estado en contacto con la 2ª persona infectada. También observamos que $b_{33} = 0$, es decir la 3ª persona del tercer grupo no ha estado en contacto con la 3ª persona del segundo grupo.

Preguntas:

- ¿A quién ha podido infectar la segunda persona del primer grupo?
 - ¿Con cuántas personas infectadas ha estado en contacto la 4ª persona del segundo grupo?
 - Podemos estar interesados en el estudio de los contactos indirectos o de segundo orden entre las 5 personas del tercer grupo y las 3 personas infectadas. Reflejar, mediante una matriz, estos contactos indirectos.
 - ¿Puede haberse contagiado la 3ª persona del tercer grupo a partir de la 2ª persona infectada?
 - ¿Cuántos contactos indirectos ha tenido la 1ª persona del tercer grupo?, ¿y la quinta?
- 6.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} c & 1 \\ 1 & d \end{pmatrix}$, hallar las condiciones para que conmuten entre sí.
- 7.- En *Massafarina* hay dos fábricas de bicicletas. La fábrica *Rosinger S.A.* produce 3 de carreras y 2 de montaña en una hora. La fábrica *Inmurain S.L.* produce 4 de carreras y 1 de montaña en una hora. La jornada de trabajo en *Rosinger S.A.* es

de 7 horas diarias mientras que en *Inmurain S.L.* se trabajan 8 horas diarias. Esta información puede expresarse en forma matricial según $P = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$.

- Obtén la matriz producto $P \cdot H$ e interpreta sus elementos.
- La matriz P expresa el número de bicicletas de carreras y de montaña que en una hora se fabrican en las dos empresas. Expresa en forma matricial la producción diaria de bicicletas de carreras y de montaña en ambas fábricas.
- Obtén la matriz A de forma que el producto $P \cdot A$ sea igual a la matriz del apartado anterior.

8.- Si A es una matriz 3×3 tal que:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

¿cuáles son las componentes de A ?

9.- Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Calcular el determinante de A .
- Calcular la inversa.
- Calcular la inversa de la inversa. ¿Qué observáis?

10.- Determinar los valores de k tales que: $\begin{vmatrix} k & k \\ 4 & 2k \end{vmatrix} = 0$.

11.- Calcular el determinante de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

12.- Dada la matriz A , hallar su determinante y calcular los adjuntos de los elementos 1, 6, 7 y 0.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 5 & -4 & 7 & -2 \\ 4 & 0 & 6 & -3 \\ 3 & -2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

13.- Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- a) Calcular $A \cdot B$ y $(A \cdot B)^{-1}$. ¿Podemos asegurar en este caso que: $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$? Justificar la respuesta.
- b) En el apartado anterior hemos visto que $A \cdot B$ tiene inversa. ¿Podemos decir lo mismo de $B \cdot A$?

14.- Resolver el siguiente sistema:

$$\left. \begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 5 \\ x_1 - 6x_2 + 7x_3 - 4x_4 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

15.- Resolver el siguiente sistema:

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= -3 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 &= -1 \end{aligned} \right\}$$

16.- Resolver el siguiente sistema:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 3 \end{aligned} \right\}$$

17.- Resolver, según los valores de a , el siguiente sistema:

$$\left. \begin{aligned} ax_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

18.- El elemento (i,j) de la siguiente matriz indica la probabilidad de que un individuo sea de genotipo j cuando su padre es de genotipo i . Los genotipos posibles son AA, Aa y aa, tanto para el padre como para el hijo.

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 \\ 0.35 & 0.5 & 0.15 \\ 0 & 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Si queremos investigar las relaciones entre abuelos y nietos podemos calcular las probabilidades para los nietos a partir del siguiente esquema:

Abuelo								
AA								
AA			Aa			aa		
0.7			0.3			0.0		
AA	Aa	aa	AA	Aa	aa	AA	Aa	aa
0.7·0.7, 0.7·0.3, 0.7·0			0.3·0.35, 0.3·0.5, 0.3·0.15			0·0,	0·0.7	0·0.3

¿Qué matriz crees que podría representar la relación entre abuelos y nietos? Obtenerla. ¿Y entre abuelos y biznietos?

- 19.- Los tamaños de dos cultivos distintos de bacterias vienen dados, respectivamente, por las dos ecuaciones siguientes: $T = 2t + 3$ y $T = 3t - 4$, donde t es el tiempo en horas. ¿Hay algún instante en el que los dos cultivos tengan el mismo tamaño?
- 20.- Introducimos un total de 10000 pájaros, de tres especies distintas, en un nuevo entorno. Se observa que las tasas de crecimiento anuales de las poblaciones de las tres especies son 3, 4 y 5 por ciento, respectivamente. Se estima que el incremento total de la población en el primer año es de 380 y que el incremento, en número, de la primera especie coincide con el incremento, en número, de la tercera. Determinar el número inicial de poblaciones de las tres especies.
- 21.- Consideramos tres especies de bacterias que coexisten en un tubo de ensayo y se alimentan de tres recursos. Cada bacteria de la especie i consume una cantidad media c_{ij} de unidades del recurso j en un día. Definimos $c_i = (c_{i1}, c_{i2}, c_{i3})$ como el vector de consumo de los recursos 1, 2 y 3 de la especie i . Supongamos que las necesidades de las especies son $c_1 = (1, 1, 1)$, $c_2 = (1, 2, 3)$ y $c_3 = (1, 3, 5)$ y que disponemos de 20000 unidades del primer recurso, 30000 del segundo y 40000 del tercero por día. Suponiendo que se consumen todos los recursos, ¿qué cantidad de bacterias de cada especie pueden coexistir en este entorno?
- 22.- Un protozoo consume euglena (E), tetrahymena (T) y chlamydomonas (C). Se observa que por cada unidad de E consumida, se consumen 2 unidades de T y 3 unidades de C. Si la energía neta que proporciona la ingestión de una unidad de cada alimento es una unidad de energía, ¿qué consumo proporciona 12 unidades de energía al protozoo?
- 23.- Las actividades de los rumiantes pueden clasificarse a grosso modo en tres categorías: pacer, trasladarse y descansar. La energía neta resultante de la actividad de pacer es de 200 calorías por hora, y la energía que pierden al trasladarse y descansar es de 150 y 50 calorías por hora respectivamente.
 - a) ¿Cómo debería dividirse el día en las tres actividades de modo que la energía adquirida al pacer compense exactamente la energía perdida debido al traslado y descanso?
 - b) ¿Es única esta división?

- 24.-** Consideremos el problema **23**. Supongamos, además, que estos animales deben descansar al menos 6 horas cada día. ¿Cómo dividirías, ahora, el día?
- 25.-** Consideremos el problema **23**.
- a) Supongamos que deben dedicar el mismo tiempo a las actividades de pastoreo y traslado, ¿cómo debería dividirse el día?
 - b) Supongamos que la energía neta adquirida al pacer es de $150 + Q$ calorías por hora, donde Q es un parámetro que indica la calidad del pasto y que se dedica el mismo tiempo a pacer que a trasladarse. Demostrar que, para Q negativo, esto es imposible. Si Q es positivo, determinar el número de horas que debe pasar paciendo como función de Q .

PRÁCTICA 5

CÁLCULO DE VECTORES Y VALORES PROPIOS.

**RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES
DIFERENCIALES LINEALES HOMOGÉNEOS.**

CÁLCULO DE VALORES Y VECTORES PROPIOS

Polinomio Característico

Si A es una matriz cuadrada y α es una variable, llamamos polinomio característico al determinante:

$$|A - \alpha I|.$$

La forma de obtenerlo con DERIVE es utilizando la función:

$$\text{CHARPOLY}(A, \alpha)$$

que, después de pulsar *Simplify*, genera un polinomio en la variable α .

Ejemplo

El polinomio característico de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ lo calcularíamos tecleando en la ventana de *Author Expression* lo siguiente:

$$\text{CHARPOLY}([[1, 3], [3, 1]], \alpha)$$

Si simplificamos la expresión anterior obtendremos la siguiente:

$$\alpha^2 - 2\alpha - 8$$

Valores propios

Las raíces del polinomio anterior se conocen como valores propios de la matriz A y se pueden calcular utilizando la función:

$$\text{EIGENVALUES}(A, \alpha)$$

que deberemos teclearla en la ventana de *Author Expression*. Los valores propios vendrán dados entre corchetes y separados por comas.

Ejemplo

Para calcular los valores propios de la matriz anterior pondríamos:

$$\text{EIGENVALUES}([[1, 3], [3, 1]], \alpha)$$

y después de simplificar obtendríamos:

$$[\alpha = -2, \alpha = 4]$$

Vectores propios

A los vectores v que cumplan la ecuación $A \cdot v = \alpha \cdot v$, donde A es una matriz cuadrada y α uno de sus valores propios, los llamaremos vectores propios de la matriz A .

Para poder calcularlos debemos, en primer lugar, cargar el fichero de utilidad VECTOR.MTH (**File/Load/Utility**) y, a continuación utilizar la función **EXACT_EIGENVECTOR** (A, λ) donde λ es uno de los valores propios previamente calculados.

Notar que a partir de cada valor propio debemos encontrar por lo menos un vector propio asociado. Si el valor propio es una raíz múltiple de orden k del polinomio característico, podremos encontrar, como máximo, k vectores propios linealmente independientes.

Ejemplo

Los dos vectores propios de la matriz anterior los calcularíamos tecleando:

$$\text{EXACT_EIGENVECTOR} ([[1, 3], [3, 1]] , -2)$$

que nos daría como resultado:

$$[x_1 = @1, x_2 = - @1] \text{ que equivale al vector } @1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Análogamente, el otro vector:

$$\text{EXACT_EIGENVECTOR} ([[1, 3], [3, 1]] , 4)$$

cuyo resultado sería:

$$[x_1 = @2, x_2 = @2] \text{ que equivale al vector } @2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nota: Es importante recordar que cuando un valor propio aparece como raíz múltiple del polinomio característico $|A - \alpha I| = 0$ y podemos obtener varios vectores propios asociados con dicho valor propio, estos vectores deben ser linealmente independientes.

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES HOMOGÉNEOS

DERIVE no es sólo una herramienta para la resolución de problemas inmediatos (derivada e integral de una función, inversa de una matriz,...). Con DERIVE podemos resolver problemas más complejos mediante la utilización consecutiva de varias operaciones. Veamos, por ejemplo, como podemos resolver un sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneo.

La solución del sistema diferencial $\mathbf{X}'(t) = \mathbf{A} \mathbf{X}(t)$ es de la forma:

$$\mathbf{X}(t) = k_1 \mathbf{P}^{(1)} e^{\lambda_1 t} + k_2 \mathbf{P}^{(2)} e^{\lambda_2 t} + \dots + k_n \mathbf{P}^{(n)} e^{\lambda_n t}$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son los valores propios de la matriz $\mathbf{A}$, $\mathbf{P}^{(1)}, \mathbf{P}^{(2)}, \dots, \mathbf{P}^{(n)}$ son, respectivamente, los vectores propios asociados y $k_1, k_2, \dots, k_n$ son constantes.

Ejemplo

$y_1(t), y_2(t), y_3(t)$ son las funciones de efectivos de tres especies animales, relativas a la variable continua "tiempo" y su dinámica en régimen de coexistencia con el año como unidad corresponde al modelo definido por el siguiente sistema diferencial:

$$\left. \begin{aligned} y'_1 &= -4 y_1(t) - 2 y_2(t) - 3 y_3(t) \\ y'_2 &= 2 y_1(t) - 3 y_3(t) \\ y'_3 &= -3 y_1(t) - 3 y_2(t) + y_3(t) \end{aligned} \right\}$$

Resolver el sistema.

Solución

Observamos que el sistema es de la forma $\mathbf{Y}'(t) = \mathbf{A} \mathbf{Y}(t)$ donde:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular los **valores propios** de la matriz $\mathbf{A}$ tecleamos en la ventana *Author Expression*:

EIGENVALUES ([[-4, -2, -3], [2, 0, -3], [-3, -3, 1]] , α)

y después de simplificar obtenemos:

[$\alpha = -2$, $\alpha = 4$, $\alpha = -5$]

El cálculo de los **vectores propios** de la matriz de coeficientes lo realizamos tecleando en la ventana *Author Expression*:

EXACT_EIGENVECTOR ([[-4, -2, -3], [2, 0, -3], [-3, -3, 1]] , -2)

que nos da como resultado:

$$[x_1 = @1, x_2 = - @1, x_3 = 0] \text{ que equivale al vector } @1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Análogamente calculamos los otros vectores:

EXACT_EIGENVECTOR ([[-4, -2, -3], [2, 0, -3], [-3, -3, 1]] , 4)

cuyo resultado es:

$$[x_1 = \alpha_2, x_2 = 5 \alpha_2, x_3 = -6 \alpha_2] \text{ que equivale al vector } \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

El vector que queda:

$$\text{EXACT_EIGENVECTOR} ([[-4, -2, -3], [2, 0, -3], [-3, -3, 1]] , -5)$$

cuyo resultado es:

$$[x_1 = \alpha_3, x_2 = -\frac{\alpha_3}{7}, x_3 = \frac{3\alpha_3}{7}] \text{ que equivale al vector } \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1/7 \\ 3/7 \end{pmatrix}$$

lo que proporciona la solución general del sistema:

$$Y(t) = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2t} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} e^{4t} + k_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1/7 \\ 3/7 \end{pmatrix} e^{-5t}$$

Los valores de las constantes k_1 , k_2 y k_3 podrían determinarse a partir de unas condiciones iniciales dadas, resolviendo el correspondiente sistema de ecuaciones lineales.

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

- 1.- Supongamos una población con la siguiente matriz de proyección (matriz de Leslie):

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 12 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Al calcular los valores propios de M , resulta que el valor propio dominante (el mayor de los valores propios reales) es $\lambda = 2$. Encontrar la composición de edad estable (el vector propio asociado al valor propio dominante) a la que tiende la población.

- 2.- Determinar el polinomio característico y los valores y vectores propios de las matrices:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

- 3.- Comprobar, resolviendo el siguiente ejemplo, que los valores propios de una matriz triangular superior (aquella en la que todos los elementos bajo la diagonal principal son ceros), son precisamente los elementos de la diagonal principal de la matriz. ¿Cuáles serían los correspondientes vectores propios?

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 4.- Determinar las soluciones generales de los sistemas de ecuaciones diferenciales siguientes:

a) $\left. \begin{array}{l} x'(t) = x(t) - y(t) \\ y'(t) = -x(t) + y(t) \end{array} \right\}$

b) $\left. \begin{array}{l} x' = x - \frac{1}{2}y \\ y' = -\frac{1}{2}x + y \end{array} \right\}$

Determinar las soluciones que satisfacen las condiciones iniciales $x(0) = 100$, $y(0) = 200$.

- 5.- Los tamaños $x(t)$ e $y(t)$ de dos poblaciones que coexisten bajo una relación simbiótica, satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\left. \begin{aligned} x'(t) &= -2x(t) + y(t) \\ y'(t) &= x(t) - 2y(t) \end{aligned} \right\}$$

Encontrar la solución general para $x(t)$ e $y(t)$. Si en $t = 0$, los tamaños de las poblaciones son $x(0) = 1000$ e $y(0) = 2000$, encontrar la solución particular para $x(t)$ e $y(t)$. Dibujar las gráficas de los tamaños de las poblaciones y explicar el comportamiento de las dos especies.

- 6.- Los tamaños $x(t)$ e $y(t)$ de dos poblaciones que coexisten bajo una relación depredador-presa (siendo $x(t)$ la población de la especie depredadora e $y(t)$ la de la especie presa), satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales siguiente:

$$\left. \begin{aligned} x'(t) &= -x(t) + y(t) \\ y'(t) &= -9x(t) + y(t) \end{aligned} \right\}$$

Encontrar la solución general para $x(t)$ e $y(t)$. Si las poblaciones iniciales son $x(0) = 100$ e $y(0) = 1000$, encontrar la solución para $x(t)$ e $y(t)$. Demostrar que la población presa se extingue tras un cierto tiempo y encontrar el instante en el que se extingue. Analizar gráficamente el comportamiento de ambas especies.

- 7.- El desarrollo de dos poblaciones $x(t)$ e $y(t)$ que están en competición por unos recursos comunes, satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales siguiente:

$$\left. \begin{aligned} x'(t) &= x(t) - k y(t) \\ y'(t) &= -k x(t) + y(t) \end{aligned} \right\}$$

donde k es una constante positiva. Encontrar la solución para $x(t)$ e $y(t)$ si las poblaciones iniciales son $x(0) = 100$ e $y(0) = 90$.

- 8.- La población de una especie en el instante t está formada por $x(t)$ machos e $y(t)$ hembras. El sistema propuesto como modelo del crecimiento de esta población es:

$$\left. \begin{aligned} x'(t) &= -a x + b y \\ y'(t) &= \quad \quad c y \end{aligned} \right\}$$

donde a , b y c son constantes positivas.

a) Determinar la solución general en términos de las poblaciones iniciales $x(0)$ e $y(0)$ de machos y hembras.

b) ¿Qué ocurrirá si $x(0) = 0$? ¿Y si $y(0) = 0$?

9.- Determinar la solución general del sistema siguiente:

$$\left. \begin{aligned} y'_1 &= y_1(t) + y_3(t) \\ y'_2 &= 2 y_1(t) + 2 y_2(t) - y_3(t) \\ y'_3 &= -10 y_1(t) - 6 y_3(t) \end{aligned} \right\}$$

10.- Determinar la solución general del sistema siguiente:

$$\left. \begin{aligned} y'_1 &= -y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) \\ y'_2 &= -3 y_1(t) + 3 y_2(t) + y_3(t) \\ y'_3 &= -12 y_1(t) + 4 y_2(t) + 6 y_3(t) \end{aligned} \right\}$$

PRÁCTICA 6

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES NO HOMOGÉNEOS

1. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES NO HOMOGÉNEOS.

Como ya vimos en la práctica anterior, con DERIVE podemos resolver problemas complejos que requieren la utilización de varias operaciones. A continuación veremos como podemos resolver un sistema de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneo.

La solución del sistema diferencial $X'(t) = A X(t) + F(t)$ es de la forma:

$$X(t) = G(t) * C(t)$$

donde

- * $G(t)$ es una matriz de orden $n \times n$ formada por n soluciones independientes de la ecuación homogénea ($X'(t) = A X(t)$), escritos en columna, es decir:

$$[P^{(1)} e^{\lambda_1 t}, P^{(2)} e^{\lambda_2 t}, \dots, P^{(n)} e^{\lambda_n t}]$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son los valores propios de la matriz A y $P^{(1)}, P^{(2)}, \dots, P^{(n)}$ son, respectivamente, los vectores propios asociados.

- * $C(t) = K + \int G^{-1}(t) F(t) dt$

A la vista del método de resolución del sistema diferencial, observamos que las operaciones necesarias para la obtención de la solución son operaciones básicas de DERIVE.

- Obtención de valores y vectores propios
- Inversión de una matriz
- Multiplicación de matrices
- Integral de una matriz funcional

Ejemplo

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\left. \begin{aligned} x'(t) &= -3x(t) + y(t) + 3t \\ y'(t) &= 2x(t) - 4y(t) + e^{-t} \end{aligned} \right\}$$

Solución

Observamos que el sistema es de la forma $X'(t) = A X(t) + F(t)$ donde:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad F(t) = \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

Para calcular los **valores propios** de la matriz de coeficientes **A** tecleamos en la ventana *Author Expression*:

$$\text{EIGENVALUES} ([[-3, 1], [2, -4]] , \alpha)$$

y después de simplificar obtenemos:

$$[\alpha = -2 , \alpha = -5]$$

El cálculo de los **vectores propios** de la matriz de coeficientes lo realizamos tecleando en la ventana *Author Expression*:

$$\text{EXACT_EIGENVECTOR} ([[-3, 1], [2, -4]] , -2)$$

que nos da como resultado:

$$[x1 = @1, x2 = @1] \quad \text{que equivale al vector } @1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Análogamente calculamos el otro vector propio:

$$\text{EXACT_EIGENVECTOR} ([[-3, 1], [2, -4]] , -5)$$

cuyo resultado es:

$$[x1 = @2, x2 = -2 @2] \quad \text{que equivale al vector } @2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Construimos ahora la matriz

$$G(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix}$$

y calculamos su inversa utilizando DERIVE:

$$G^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{2e^{2t}}{3} & \frac{e^{2t}}{3} \\ \frac{e^{5t}}{3} & -\frac{e^{5t}}{3} \end{pmatrix}$$

Multiplicamos ahora esta matriz por el vector $F(t) = \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$ obteniendo:

$$G^{-1}(t) * F(t) = \begin{pmatrix} 2te^{2t} + \frac{e^t}{3} \\ te^{5t} - \frac{e^{4t}}{3} \end{pmatrix}$$

y a continuación integramos el resultado:

$$C(t) = \int G^{-1}(t) F(t) dt = K + \begin{pmatrix} \frac{e^{2t}(2t-1)}{2} + \frac{e^t}{3} \\ e^{5t}\left(\frac{t}{5} - \frac{1}{25}\right) - \frac{1}{12}e^{4t} \end{pmatrix}$$

Multiplicando ahora la matriz $G(t)$ por $C(t)$ obtenemos:

$$G(t) * C(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} * \left(\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{e^{2t}(2t-1)}{2} + \frac{e^t}{3} \\ e^{5t}\left(\frac{t}{5} - \frac{1}{25}\right) - \frac{1}{12}e^{4t} \end{pmatrix} \right)$$

que tras operar adecuadamente, proporciona la solución general del sistema:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = K_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + K_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-5t} + \begin{pmatrix} \frac{e^{-t}}{4} + \frac{3(20t-9)}{50} \\ \frac{e^{-t}}{2} + \frac{3(10t-7)}{50} \end{pmatrix}$$

Si se proporcionan unas condiciones iniciales para ambas poblaciones, podemos resolver el sistema correspondiente y obtener K_1 y K_2 .

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

- 1.- Una solución de sal fluye de un recipiente, en una razón proporcional a su volumen, en un segundo recipiente, del que fluye en una razón constante. Definimos $V_1(t)$ y $V_2(t)$ como los volúmenes de la solución de sal en los recipientes 1 y 2 en el instante t . Entonces $V_1(t)$ y $V_2(t)$ satisfacen las ecuaciones:

$$\frac{dV_1}{dt} = -a V_1 \quad \text{y} \quad \frac{dV_2}{dt} = a V_1 - b \quad \text{donde } a \text{ y } b \text{ son constantes}$$

positivas.

Si $V_1(0) = 1000$ y $V_2(0) = 100$, determinar $V_1(t)$ y $V_2(t)$ para todo $t > 0$.

- 2.- Determinar la solución del sistema siguiente que satisface $x(0) = 6$, $y(0) = 10$:

$$\left. \begin{aligned} x'(t) &= 3x(t) - 2y(t) - 4 \\ y'(t) &= -2x(t) + 3y(t) - 4 \end{aligned} \right\}$$

- 3.- El crecimiento de dos especies en régimen de coexistencia se describe por medio del modelo:

$$\left. \begin{aligned} y'_1 &= y_1(t) - 2 y_2(t) + e^t \cos 2t \\ y'_2 &= -2 y_1(t) + y_2(t) + e^t \cos 2t \end{aligned} \right\}$$

Resolver el sistema diferencial que constituye el modelo y calcular la solución particular que verifica las condiciones iniciales:

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 10 \\ 100 \end{pmatrix}$$

- 4.- La evolución del tamaño de dos especies que comparten un ecosistema puede ser descrita por el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\left. \begin{aligned} x'(t) - 2 + y(t) &= 8 - 13e^{-t} \\ y'(t) + x(t) - 4 &= 13e^{-t} - 2 \end{aligned} \right\}$$

Determinar:

- (i) la solución correspondiente a las condiciones iniciales $x(0) = 10$, $y(0) = 5$,

(ii) el tiempo que deberá transcurrir para que ambas poblaciones tengan el mismo tamaño.

- 5.- Sean $y_1(t)$, $y_2(t)$ e $y_3(t)$ los tamaños de las tres poblaciones de tres especies animales, en función de la variable "tiempo". Su dinámica en régimen de coexistencia, con el año como unidad, corresponde al modelo definido por el siguiente sistema diferencial:

$$\left. \begin{aligned} y'_1 &= -4y_1(t) - 2y_2(t) - 3y_3(t) + 18e^t \\ y'_2 &= 2y_1(t) - 3y_3(t) + 18e^t \\ y'_3 &= -3y_1(t) - 3y_2(t) + y_3(t) + 18e^t \end{aligned} \right\} Y(0) = \begin{pmatrix} 11 \\ 18 \\ 19 \end{pmatrix}$$

- Resolver el sistema y analizar el comportamiento a la larga de las tres especies.
- Calcular los efectivos de cada especie al cabo de seis meses.

PRÁCTICA 7

ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS

ECUACIONES EN DIFERENCIAS

Una ecuación en diferencias relaciona los valores de una variable incógnita x_n para distintos valores de n . El orden de una ecuación en diferencias viene determinado por la diferencia entre los subíndices mayor y menor de x , respectivamente, presentes en la ecuación. Así pues, $x_n - x_{n-1} = 2^{-n}$ es de primer orden, mientras que $2x_{n+2} + x_n = n!$ es de segundo orden.

DERIVE es capaz de resolver con exactitud ecuaciones en diferencias de primer y segundo orden. Para ello es necesario cargar previamente con **File + Load + Utility** el fichero RECUREQN.MTH y en **Declare + Algebra State + Simplification** seleccionar precisión exacta en **Precision**. Además, es conveniente declarar la variable n como entera; para ello, en **Declare + Domain** pondremos n en **Variable** y al apretar **Declare** seleccionaremos **Integer** y **Positive**. Si no se declara entera, en algunos casos se obtiene al resolver la ecuación en diferencias la expresión $\text{Floor}(n)$, que indica la parte entera de n .

Es importante notar las limitaciones de DERIVE para resolver algunas ecuaciones en diferencias. En los ejercicios de este tema podremos comprobar cómo, en algunas ocasiones, el programa muestra un resultado sin sentido. En tales ocasiones procederemos a resolver el ejercicio a mano con las técnicas vistas en Teoría.

Ecuaciones en diferencias de primer orden

La ecuación en diferencias de primer orden $x_{n+1} = f(n) x_n + g(n)$ se resuelve utilizando la función **LIN1_DIFFERENCE**. Desde la línea de AUTHOR introducimos una expresión del tipo:

LIN1_DIFFERENCE(f, g, n, n₀, x_{n₀})

siendo:

- **f** y **g** son respectivamente $f(n)$ y $g(n)$.
- **n** es el parámetro en función del cual está expresada la ecuación.
- **n₀** es un valor concreto de n .
- **x_{n₀}** es el valor de x_n cuando $n = n_0$.

Ejemplo: Hallar la solución de la ecuación en diferencias $x_{n+1} = x_n + 500 \cdot 2^{-n}$ que cumple $x_0 = 1000$.

Nos aseguramos en primer lugar de que la precisión de DERIVE esté en modo exacto. Abrimos la línea de AUTHOR e introducimos:

AUTHOR expression: LIN1_DIFFERENCE(1, 500 2⁻ⁿ, n, 0, 1000)

Después de simplificar obtenemos: $2000 - 125 \cdot 2^{3-n}$.

NOTA: si las condiciones particulares $\mathbf{n}_0$ y $\mathbf{x}_{n_0}$ no fueran conocidas, podríamos sustituirlas por una constante c y un valor $\mathbf{n}_0 = 0$ para obtener la solución general de la ecuación en diferencias.

Ecuaciones en diferencias lineales de segundo orden con coeficientes constantes

La forma general de estas ecuaciones para DERIVE es:

$$x_{n+2} + p x_{n+1} + q x_n = r(n)$$

donde p y q son constantes y r(n) es una función que depende de n. DERIVE las resuelve mediante la función **LIN2_CCF_BV**. En la línea de AUTHOR teclearemos una expresión del tipo:

LIN2_CCF_BV (p, q, r, n, $\mathbf{n}_0$, $\mathbf{x}_{n_0}$, $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{x}_{n_1}$)

donde:

- **p** y **q** son las constantes.
- **r** es r(n).
- **n** es el parámetro en función del cual está expresada la ecuación.
- **$\mathbf{n}_0$** es un valor concreto de n.
- **$\mathbf{x}_{n_0}$** es el valor de x_n cuando $n = n_0$.
- **$\mathbf{n}_1$** es un valor concreto de n.
- **$\mathbf{x}_{n_1}$** es el valor de x_n cuando $n = n_1$.

NOTA: Nosotros trabajaremos con ecuaciones en diferencias lineales de segundo orden del tipo:

$$a x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = f(n)$$

Observar que : $p = \frac{b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$, $r(n) = \frac{f(n)}{a}$

Ejemplo: Resolver la ecuación en diferencias $x_{n+2} + 6x_{n+1} + 9x_n = 0$ para las condiciones iniciales $x_0 = 1$ y $x_1 = 2$.

Teclearíamos en la línea de AUTHOR: **LIN2_CCF_BV (6, 9, 0, n, 0, 1, 1, 2)**

Después de simplificar obtenemos: $3^{n-1} (3 - 5n) (-1)^n$

NOTA: si las condiciones particulares $\mathbf{n}_0$, $\mathbf{x}_{n0}$, $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{x}_{n1}$ no fueran conocidas, para obtener la solución general de la ecuación en diferencias deberíamos usar la expresión $\text{LIN2_CCF} (p, q, r, n, k, h)$, donde k y h son dos constantes.

Notar finalmente que en ocasiones DERIVE presenta la expresión $\text{SIN} (\pi n)$ en las soluciones a las ecuaciones en diferencias. Esta expresión se puede sustituir por 0, dado que, cuando n vale 0, 1, 2, ... entonces $\text{SIN} (\pi n) = 0$. Análogamente con la expresión $\text{COS} (\pi n)$ que vale $(-1)^n$.

SUMAS DE UN NÚMERO FINITO DE TÉRMINOS

En ocasiones puede interesarnos resolver manualmente una ecuación en diferencias (notar que DERIVE no resuelve todos los ejercicios). En la resolución aparece una suma de un número finito de términos. En este apartado se muestra como obtener el valor de dicha suma con DERIVE.

Para introducir una suma parcial, podemos utilizar uno de los dos métodos siguientes:

- Desde la línea de **Author** introducir una expresión del tipo:

$$\text{SUM}(\mathbf{a_n}, \mathbf{n}, \text{principio}, \text{final})$$
 donde principio indica el valor inicial de n , y final el valor final. En el caso de una serie el valor final es infinito (inf).
- Utilizando la opción **Calculus + Sum**, donde introduciremos la expresión de $\mathbf{a_n}$ y los parámetros antes mencionados.

En cualquiera de los casos anteriores, utilizamos **Simplify** para obtener el resultado.

Ejemplos

Obtener el resultado de las siguientes sumas

$$1) \sum_{n=1}^m \frac{1}{2^n} \qquad 2) \sum_{n=1}^5 \frac{1}{n}$$

Solución:

1) Declarar m como entero.

Introducimos en **Author**: $\text{SUM}(\frac{1}{2^n}, n, 1, m)$ y obtenemos:

$$\#1 \qquad \sum_{n=1}^m \frac{1}{2^n}$$

Simplificando, obtenemos el valor de la suma:

$$\#2 \qquad 1 - 2^{-m}$$

2) Introducimos en **Author** la expresión: $\frac{1}{n}$.

$$\#3 \qquad \frac{1}{n}$$

A continuación elegimos la opción **Calculus + Sum**. Aparecen los siguientes campos:

variable: n

Sum: definite

Lower limit: 1

Upper limit: 5

Obtendremos:

$$\#4 \qquad \sum_{n=1}^5 \frac{1}{n}$$

Al simplificar obtenemos el valor de la suma:

$$\#5 \qquad 137 / 60$$

SISTEMAS DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS

Como vimos al resolver los sistemas de ecuaciones diferenciales, podemos utilizar DERIVE como una herramienta para la resolución de problemas más complejos aunque DERIVE no tenga un algoritmo específico que los solucione.

Al resolver un sistema de dos ecuaciones en diferencias con coeficientes constantes, se tiene:

$$x_{n+1} = a x_n + b y_n + f(n)$$

$$y_{n+1} = c x_n + d y_n + g(n)$$

con las condiciones iniciales x_{n_0} , y_{n_0} .

El proceso de resolución de este sistema se puede dividir en 4 etapas:

Paso 1 Obtención de la ecuación en diferencias de una de las dos variables (generalmente x_n)

$$x_{n+2} + p x_{n+1} + q x_n = r(n)$$

NOTA: Este paso debe realizarse manualmente.

Paso 2 Solución general de esta ecuación.

Con el comando AUTHOR escribimos : LIN2_CCF(p, q, r, n, k, h)

siendo **k** y **h** las dos constantes que saldrán en la solución general.

Después de simplificar obtendremos la solución general de x_n

Paso 3 Solución general de y_n

De la primera ecuación se obtiene $y_n = 1/b(x_{n+1} - a x_n - f(n))$.

La introducimos con AUTHOR y la simplificamos, obteniendo la solución general de y_n .

Paso 4 Obtención de las soluciones particulares.

Tendremos que obtener los valores de h y k utilizando las condiciones iniciales.

Ejemplo:

Resolver: $x_{n+1} = 2x_n + y_n$

$$y_{n+1} = x_n + 2y_n$$

con las condiciones iniciales $x_0 = 100$ i $y_0 = 200$.

Paso 1

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = 0.$$

Paso 2

AUTHOR: LIN2_CCF(-4, 3, 0, n, k, h)

Simplificando: $3^n k + h$ (solución general de x_n)

Paso 3

$$y_n = x_{n+1} - 2x_n$$

AUTHOR: $(3^{n+1} k + h) - 2(3^n k + h)$

Simplificando: $3^n k - h$ (Solución general de y_n)

Paso 4

AUTHOR: $[k + h = 100, k - h = 200]$

obtenemos $[k = 150, h = -50]$

Luego la solución será:

$$x_n = 3^n 150 - 50$$

$$y_n = 3^n 150 + 50$$

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

1.- Determinar las soluciones generales de las siguientes ecuaciones:

a) $x_{n+1} - x_n = 2^{-n}$

b) $x_{n+1} - x_n = 2x_n$

c) $x_{n+1} = \frac{n+5}{n+3} x_n$

d) $x_{n+1} = (n+1) x_n$

e) $x_{n+1} - 3x_n = 3x_{n+1} - x_n$

f) $x_{n+1} = n x_n + 1$

2.- El radio se desintegra con una razón de un 1% cada 25 años. Considerar una muestra de r_0 gramos de radio. Definir r_n como la cantidad de radio que permanece en la muestra después de $25n$ años. Determinar una ecuación en diferencias para r_n y calcular su solución. ¿Cuánto radio quedará después de 100 años?.

3.- La reacción a un fármaco después de n horas de su inyección es r_n , medida en las unidades apropiadas. Supongamos que la reacción satisface la ecuación $r_{n+1} = 0.8 r_n + 0.4^n$. Si $r_0 = 1$, calcular r_n . Dibujar la función r_n . ¿Después de cuantas horas ocurrirá la reacción máxima a la droga?.

4.- Determinar las soluciones de las ecuaciones siguientes, que satisfacen las condiciones iniciales $x_0 = 1$, $x_1 = 2$.

a) $x_{n+2} + x_{n+1} = 6x_n$

b) $x_{n+4} + 6x_{n+3} + 9x_{n+2} = 0$

c) $x_{n+2} + 2x_{n+1} + 2x_n = 0$

d) $x_n = x_{n+2} - x_{n+1}$

5.- En un modelo sencillo de crecimiento de la población se supone que la población en la n -ésima generación, x_n , es la suma de las poblaciones en las dos generaciones precedentes. Si $x_0 = 0$ y $x_1 = 1$, determinar x_n para todas las generaciones n . (La sucesión x_n se conoce como sucesión de Fibonacci). Calcular el límite de la razón $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ cuando n tiende a infinito.

6.- Determinar las soluciones de las ecuaciones siguientes que satisfacen las condiciones iniciales $x_0 = 0$ y $x_1 = 1$.

a) $x_{n+2} - 9x_n = 1$

b) $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = -1$

c) $4x_{n+2} + 5x_{n+1} + x_n = 2^{2n}$

d) $x_{n+2} + 2x_{n+1} - 3x_n = (-2)^n$

7.- Resolver la ecuación en diferencias siguiente:

$$x_{n+2} + 3x_{n+1} + 2x_n = -7 \cdot 3^{-(n+1)}$$

con las condiciones iniciales $x_0 = 104$, $x_1 = 140$.

- 8.- Una población de insectos crece de manera que el incremento en un periodo es el triple que en el periodo anterior. Si $x_0 = 100$ y $x_1 = 150$, determinar la población en la n -ésima generación.
- 9.- En el problema anterior si en lugar de ser el triple fuese la mitad, con las mismas condiciones iniciales, determinar la población en la n -ésima generación. Estudiar el tamaño de la población al aumentar n .
- 10.- Una población de ratones se reproduce de manera que por cada ratón, en el mes siguiente hay 6 ratones. Supongamos que un gato captura 10 ratones al mes. Si representamos por r_n el número de ratones de la población al final del mes n y por g al número de gatos (que supondremos constante), calcular el tamaño de la población de ratones en cualquier mes sabiendo que hay inicialmente 8 ratones. ¿Qué ocurriría si hubiera 4 gatos?. ¿Y si hubiera 5 gatos?
- 11.- La evolución de un banco de peces es tal que de un año al siguiente su tamaño se triplicaría si no fuera por una cantidad fija en que disminuye debido a la pesca. Si al principio del año 1996 el tamaño del banco es de 5000 Tm., calcular la cuota anual (fija) de pesca que se debería permitir para que al inicio del año 2001 el tamaño del banco sea de 10000 Tm.
- 12.- Una población de presas se reproduce de manera que la población aumenta $1/4$ de su tamaño cada año. Supongamos que una población de tamaño constante de depredadores elimina 10 presas al año por cada depredador. Obtener la expresión del tamaño de la población de presas mediante una ecuación en diferencias. Si inicialmente hubiera 200 presas y 10 depredadores, ¿se extinguiría la población de presas?
- 13 - Dos especies que conviven en un mismo territorio siguen un crecimiento descrito por el sistema de ecuaciones en diferencias siguiente:

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= 5x_n - 2y_n + n \\ y_{n+1} &= 4x_n - y_n + 3 \end{aligned} \right\} \quad (n \text{ en años})$$

Si inicialmente el número de individuos de cada especie es $x_0 = 130$, $y_0 = 250$, resolver el sistema y analizar el comportamiento a la larga de las dos especies.

$$\left(\text{Nota: } \sum_{j=0}^{n-1} (2j - 5) = n(n - 6), \quad \sum_{j=0}^{n-1} \frac{2j - 5}{3^j} = 3^{1-n} (2 - n) - 6 \right)$$

14.- Resolver:

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= 4x_n + 6y_n - 3^n \\ y_{n+1} &= -2x_n - 4y_n + 3^n \end{aligned} \right\}$$

Obtener la solución particular que satisface las condiciones iniciales, $x_0 = 21$, $y_0 = 150$, expresando por separado el caso n y el caso n impar.

15.- El crecimiento de dos especies en régimen de coexistencia está gobernado por el modelo discreto:

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + 2y_n \\ y_{n+1} &= -2x_n + y_n \end{aligned} \right\}$$

Resolver el sistema y calcular la solución particular que verifica las condiciones iniciales:

$$x_0 = 10, y_0 = 100.$$

16.- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias:

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + y_n + 2^n \\ y_{n+1} &= 3x_n - y_n - 2^n \end{aligned} \right\}$$

17.- El crecimiento de dos especies en régimen de competición es tal que el tamaño de cada una en un periodo es el doble del que tenían menos el tamaño de la otra especie en el periodo anterior. Si el tamaño inicial es 100 y 150 en cada especie, se pide:

- Formular el modelo.
- Determinar el tamaño de cada especie en el periodo n .
- ¿ Se extingue alguna de las dos especies?.
- Repetir el problema para los tamaños iniciales de 100 y 100 y comentar los resultados.

18.- El crecimiento de una población de halcones durante cualquier periodo es proporcional a su tamaño al principio de dicho periodo (siendo 0.1 la constante de proporcionalidad) menos una cantidad, que podemos estimar constante, de 2 halcones que se pierden al año debido a los cazadores furtivos. Inicialmente el

número de halcones es de 20. En el mismo paraje hay una población de palomas que crecería de forma que su población en un año sería un 50% más que la población del año anterior, pero la presencia de los halcones hace que se vea disminuida en 50 veces el tamaño de la población de halcones. Inicialmente hay 2500 palomas en ese paraje. Establecer un modelo que corresponda a las características descritas y resolverlo.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

Práctica 2: Derivadas y Cálculo de Primitivas. Integral Definida. Gráficas de Funciones.

- 1.- $f(x) = \begin{cases} |x - 200| & 0 \leq x \leq 450 \\ |x - 700| & 450 \leq x \leq 1000 \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 200 - x & 0 \leq x \leq 200 \\ 700 - x & 200 \leq x \leq 700 \end{cases}$
- 2.- a) $p(0) = 10000$ bacterias b) velocidad media = 100 bacterias/hora
c) velocidad media = - 500 d) velocidad = $1000 - 600t$
- 3.- a) $v(2) = 240$ b) $v(0) = 0$ c) $v(5) = 600$
- 4.- $n = 10$.
- 5.- $W'(t) = 8t^3 - 6t^2 + 14t - 3$.
- 6.- 2,17 patos cada mes.
- 7.- $\Delta V = 1.620 \times 10^3 \mu^3$, $\frac{\Delta V}{\Delta r} = 0.540 \times 10^3 \mu^2$
- 8.- Vel. med. 1^{er} día = 4.1 Km / h, Vel. med. 2^o día = 4.7 Km / h,
Vel. med. todo el trayecto = 4.28 Km / h
- 9.- a) $\frac{\Delta N}{\Delta t} = 90$ unid./día b) $\frac{\Delta N}{\Delta t} = 540$ unid./día c) $\frac{\Delta N}{\Delta t} = 450$ unid./día
- 10.- a) $y^{iv} = -4e^x \sin x$ b) $y^{iv} = \frac{6}{x}$ c) $y^{iv} = 16 \sin x \cos x$
- 11.- a) $y' = x^x (\ln x + 1)$
b) $y' = (\sin x)^{\cos x} (-\sin x \ln (\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x})$
c) $y' = (\ln x)^x [\ln (\ln x) + \frac{1}{\ln x}]$
d) $y' = (\sin x)^x (\ln (\sin x) + x \operatorname{ctg} x)$
- 12.- a) $y^v = a^x (\ln a)^5$ e) $y^v = 4^5 e^{3+4x}$
b) $y^v = \frac{k!}{(k-5)!} x^{(k-5)}$ f) $y^v = 5^5 \cos(5x)$
c) $y^v = 24x^{-5}$ g) $y^v = x e^x + 5e^x$
d) $y^v = \cos x$ h) $y^v = \frac{-6}{x^4}$
- 13.- a) 1, creciente b) -17.05, decreciente c) $-e^\pi$, decreciente

14.- a) ? b) 790.775 c) 188.155

15.- 0

16.- a) $y' = z^Z (\ln(z) \operatorname{sen}(bz) + b \cos(bz) + \operatorname{sen}(bz))$

b) $z' = y^{(-y-2)} (y+a)^y [y (y+a) \ln(\frac{y+a}{y}) - a y - a]$

17.- $\frac{1}{3} e^{t^3} + C$

18.- $e^t (t - 1) + C$

19.- a) máx. locales: 0 mín. locales: 2

máx. global: 0, 3 mín. global: -2

b) $t = 1$ $0 \notin D_f$ (Derive: $f(0) = 0$) Asíntota vertical: $x = 1$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} = \infty$

No tiene máximos ni mínimos relativos. Asíntota horizontal $y = 1$

d) Asínt. vert.: $x = 1$ Máx. local: $x = 0$ Mín. local: $x = 2$

$(-\infty, 0)$ creciente, $(0, 1)$ decreciente, $(1, 2)$ decreciente, $(2, \infty)$ creciente

20.- a) $\operatorname{sen} x - x \cos x + C$ b) $-(x+1)e^{-x} + C$

c) $\frac{1}{2} e^x [\operatorname{sen} x + \cos x] + C$ d) $(x-1)e^x + C$

e) $x (\ln x - 1) + C$

f) $\frac{1}{n+1} (x^{n+1} \ln x) - \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1} + C \quad (n \neq -1)$

Con Derive: $\frac{x^{n+1} ((n+1) \ln x - 1) + C (n+1)^2 + 1}{(n+1)^2}$

g) $\frac{2}{3} x \sqrt{x} - \frac{x^2}{4} + 4 \sqrt{x} + C$ h) $-\frac{1}{2(x-1)^2} + C$

i) $\frac{1}{6} (1+x^4)^{3/2} + C$ j) $-\frac{1}{4(x^2+4)^2} + C$

k) $\frac{9}{4} (x^2+3)^{2/3} + C$ l) $\frac{a^{4x}}{4 \ln a} + C$

m) $-\frac{1}{2} e^{1/x^2} + C$ n) $\frac{1}{3} e^{x^3} + C$

o) $\frac{1}{2} \ln | e^{2x} + 3 | + C$ p) $-\sqrt{a^2 - x^2} + C$

q) $\frac{1}{2} e^{2\sin x} + C$

r) $-\frac{1}{2} \ln |\cos 2x| + C$

s*) $\frac{1}{3} \frac{1}{\cos 3x} + C$

Con Derive: $2 \int \frac{\sin 3x}{\cos 6x + 1} dx + C$

t) $\frac{1}{2} e^x [\sin x - \cos x] + C$

u) $\frac{a}{a^2+b^2} e^{ax} \left[\cos bx + \frac{b}{a} \sin bx \right] + C$

22.- a) $\frac{35}{3}$

b) 4

c) -4

d) $-\frac{53}{60}$

e) $\frac{37}{60}$

f) $-\frac{124}{15}$

Práctica 3: Ecuaciones Diferenciales.

- 1.- (a) $x(t) = e^{3t}$ (b) $x(t) = 1 + t + t^2 + \frac{t^3}{3}$
 (c) $x(t) = -\frac{1}{2} e^{-2t} + \frac{3}{2}$ (d) $x(t) = 2 e^t - 1$
- 2.- (a) $x(t) = 0$ (b) $x(t) = \frac{1}{3} \left[(t+1)^2 - \frac{1}{t+1} \right]$
 (c) $x(t) = \frac{(1+t)^4}{4} - \frac{1}{4}$ (d) $x(t) = \sin^2 t + \sin t$
- 3.- $x(t) = e^{-t^2} \left[\frac{t^{2k+2}}{2k+2} + e - \frac{1}{2k+2} \right]$
- 4.- $S(t) = e^{-ct} \left[S(0) - \frac{r}{c} \right] + \frac{r}{c}$
- 5.- (a) $x(t) = e^{\sin t} - \cos t + 1$ (b) $x(t) = \frac{-3}{3t + t^3 - 3}$
 (c) $x(t) = \operatorname{tg} \left(\frac{t^3}{3} + \frac{\pi}{4} \right)$ (d) $x(t) = e^{-2t+t^3/3}$
- 6.- (a) $x(t) = \frac{t^2}{3} + k$ (b) $x(t) = \frac{2+t^2}{3}$
- 7.- $x(t) = \operatorname{Ln}(t^2 + 1) + k$
- 8.- $x(t) = 3 t^2 + k t$
- 9.- $x(t) = \frac{n(n+1) e^{-r(n+1)t}}{1 + n e^{-r(n+1)t}}$ (Derive no la resuelve)
- 10.- (a) $x(t) = 2 e^{-5t/2} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) + \frac{10}{\sqrt{3}} e^{-5t/2} \operatorname{sen} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right)$
 (b) $x(t) = -e^{-3t/2} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-3t/2} \operatorname{sen} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right)$
 (c) $x(t) = 16 e^{-t/4} \operatorname{sen} \left(\frac{t}{4} \right)$
- 11.- (a) $x(t) = -t + C_1 e^t + C_2 e^{-t}$
 (b) $x(t) = \frac{t^2}{2} e^{-2t} + C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}$
 (c) $y(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} x \cos x + C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$
- 12.- (a) $x(t) = C_1 + C_2 e^{-t/2}$ (b) $x(t) = 6 - 6 e^{-t/2}$
- 13.- (a) $y(t) = \frac{e^t}{4} + C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t}$, (b) $y(t) = \frac{e^t}{4} - \frac{e^{3t}}{4} + \frac{t e^{3t}}{2}$
- 14.- (a) $v(t) = 6 t + C_1 - 12 + C_2 e^{-t/2}$ (b) $v(t) = 6 t - 15 + 10 e^{(1-t)/2}$
- 15.- $x(t) = 6 - 6 e^{-t/2}$

16.- $t = \frac{50 \ln 3}{\ln 2} \approx 79.24$ años

17.- $x(12) = 8 x(0)$

18.- (a) $v(t) = 500 - 500 e^{-0.02t}$ (b) $t = 80.47$

19.- $t = 2.71$ horas

20.- $x(t) = -\frac{2}{3} + [x(0) + \frac{2}{3}] e^{2t}$

21.- $x(t) = C_1 e^{0.2t} + C_2 e^{-0.1t} - \frac{7500}{3}$

22.- (a) $x(t) = 435 e^{0.513t}$ (b) $3.95 \cdot 10^{29}$ lubinas

23.- $y(t) = \frac{8 e^{4t}}{4 - 0.004 + 0.004 e^{4t}}$ 2 semanas

24.- 64.46° F

Práctica 4: Cálculo Matricial. Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales.

$$1.- \quad A + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}, \quad A - B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad A + 2B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 8 & 4 & 0 \\ -1 & 9 & -6 \end{pmatrix}$$

$$3A - B = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 2 \\ 10 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 10 \end{pmatrix}, \quad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (A^t)^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A - (A^t)^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det(A) = -6, \quad A^d = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 10 \\ -3 & 3 & -3 \\ -2 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$(A^d)^t = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ -8 & 3 & 4 \\ 10 & -3 & -8 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/2 & 1/3 \\ 4/3 & -1/2 & -2/3 \\ -5/3 & 1/2 & 4/3 \end{pmatrix}, \quad A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 3 \\ 4 & 10 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -2 \\ 8 & 2 & 4 \\ 5 & 9 & -7 \end{pmatrix}, \quad (A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 25/9 & -4/3 & -14/9 \\ -38/9 & 13/6 & 22/9 \\ -31/9 & 11/6 & 17/9 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3/2 & 2/3 \\ -14/3 & 5/2 & -1 \\ 20/3 & -7/2 & 4/3 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 25/9 & -4/3 & -14/9 \\ -38/9 & 13/6 & 22/9 \\ -31/9 & 11/6 & 17/9 \end{pmatrix}$$

$$2.- \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & -4 & 11 \\ 8 & 10 & -2 & 8 \end{pmatrix} \quad (3 \times 4)$$

B.A no se puede calcular, n° col. B ≠ n° filas A.

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 1 & 10 & 10 \\ 8 & 10 & 20 \end{pmatrix} \quad (3 \times 3)$$

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 26 & 7 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \quad (2 \times 2)$$

$$B \cdot B^t = \begin{pmatrix} 15 & -3 \\ -3 & 10 \end{pmatrix} \quad (2 \times 2)$$

$$B^t \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & -5 \\ -1 & 4 & -5 & 13 \end{pmatrix} \quad (4 \times 4)$$

$$(A.B)^t = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 4 & 5 & 10 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & 11 & 8 \end{pmatrix} = B^t.A^t$$

3.- 93 helechos.

4.- De la matriz A podemos deducir que ninguna especie es predadora de si misma y que todas las especies son predadoras de las otras dos por igual.

La matriz B nos indica que ninguna especie es predadora de si misma y que la especie 1 es predadora, en cantidades iguales, de las otras dos, mientras que la 2ª especie solo consume animales de la especie 1 y la 3ª solo de la especie 2.

Si $C = A \cdot r$ (de orden 3×1) la componente c_i representa la cantidad de calorías que la especie i consume durante un día, por término medio.

5.- (a) A la 1ª y la 4ª (b) 2 (c) $C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (d) Si ($c_{23} = 2$)

(e) La 1ª persona del tercer grupo ha tenido 3 contactos indirectos. La 5ª persona ninguno.

6.- $a = b$ y $c = d$

7.- (a) $P \cdot H = \begin{pmatrix} 53 \\ 22 \end{pmatrix}$ 53 representa el número de bicicletas de carrera producidas durante 1 día y 22 el número de bicicletas de montaña.

(b) $\begin{pmatrix} 21 & 32 \\ 14 & 8 \end{pmatrix}$ (c) $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

8.- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

9.- (a) $\det(A) = 1$ (b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

10.- $K = 0$ y $K = 2$

11.- $\det(A) = 21$ $\det(B) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ $\det(C) = 8$

12.- $\text{adj}(1) = -12$ $\text{adj}(6) = -32$ $\text{adj}(7) = 61$ $\text{adj}(0) = -112$ $\det(A) = -402$

13.- (a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (AB)^{-1}$. No, ya que las matrices A^{-1} y B^{-1} no existe

(b) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. No, ya que $(BA)^{-1}$ no existe. Nótese que $\det(B \cdot A) = 0$.

14.- Incompatible.

15.- Compatible Indeterminado:

$$x_4 = \lambda, x_3 = \frac{-10 + 3\lambda}{7}, x_2 = \frac{-12 - 2\lambda}{7}, x_1 = \frac{13 - 6\lambda}{7}$$

16.- Compatible determinado: $x_1 = \frac{4}{7}$, $x_2 = \frac{3}{7}$, $x_3 = \frac{-1}{7}$

17.- $a \neq 1$ y $a \neq -2$, compatible determinado: $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{a+2}$

$a = 1$, compatible indeterminado: $x_1 = 1 - \lambda - \mu$, $x_2 = \lambda$, $x_3 = \mu$

$a = -2$, incompatible.

$$18.- \quad A^2 = \begin{pmatrix} 119/200 & 9/25 & 9/200 \\ 21/50 & 23/50 & 3/25 \\ 49/200 & 14/25 & 39/200 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 217/400 & 39/100 & 27/400 \\ 91/200 & 11/25 & 21/200 \\ 147/400 & 49/100 & 57/400 \end{pmatrix}$$

19.- Si, $t = 7$

20.- Compatible determinado: 5000 de la 1ª especie, 2000 de la 2ª y 3000 de la 3ª.

21.- Compatible indeterminado: $10000 + \lambda$ de la 1ª especie, $10000 - 2\lambda$ de la 2ª y λ de la 3ª, con $0 \leq \lambda \leq 5000$.

22.- Compatible determinado: 2 unidades de E, 4 de T y 6 de C.

23.- (a) Compatible indeterminado: $\frac{72 - 2\lambda}{7}$ horas en pacer, $\frac{96 - 5\lambda}{7}$ horas en trasladarse y λ horas en descansar, con $0 \leq \lambda \leq \frac{96}{5} = 19.2$ horas

(b) La solución no es única.

24.- De la misma forma que en el problema anterior, con $6 \leq \lambda \leq \frac{96}{5} = 19.2$ horas.

25.- a) Compatible determinado: 8 horas a cada una de las tres actividades.

b) Para $Q = -100$, incompatible, y para $Q \neq -100$, compatible determinado:

$\frac{1200}{100 + Q}$ horas en pacer y trasladarse y $\frac{24Q}{100 + Q}$ horas a descansar.

Práctica 5: Cálculo de Vectores y Valores propios. Resolución de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneos.

1.- Valor propio dominante: $\lambda = 2$ con vector propio asociado $x = \begin{pmatrix} 96 \\ 24 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ó

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1/4 \\ 1/32 \\ 1/96 \end{pmatrix}$$

2.- (a) Polinomio: $a^2 - 5a + 4$; $\lambda_1 = 4$, $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 1$, $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(b) Polinomio: $b^2 - 8b + 16$; $\lambda = 4$, $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(c) Polinomio: $(2 - c)(c^2 - 4c + 3)$; $\lambda_1 = 1$, $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 2$, $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\lambda_3 = 3 , x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(d) Polinomio: $-d^3 + 7d^2 - 11d + 5$; $\lambda_1 = 5$, $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$$\lambda_2 = 1 \text{ (doble)} , x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} , x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(e) Polinomio: $-e^3 + 6e^2 - 5e - 12$; $\lambda_1 = -1$, $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -3 \end{pmatrix}$;

$$\lambda_2 = 3 , x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} ; \lambda_3 = 4 , x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3.- $\lambda_1 = 2$, $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 1$, $x^{(2)} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4.- a) Sol. general: $x(t) = k_1 e^{2t} + k_2$, $y(t) = -k_1 e^{2t} + k_2$

Sol. particular: $x(t) = -50 e^{2t} + 150$, $y(t) = 50 e^{2t} + 150$

- b) Sol. general: $x(t) = k_1 e^{3t/2} + k_2 e^{t/2}$, $y(t) = -k_1 e^{3t/2} + k_2 e^{t/2}$
 Sol. particular: $x(t) = -50 e^{3t/2} + 150 e^{t/2}$, $y(t) = 50 e^{3t/2} + 150 e^{t/2}$
- 5.- Sol. general: $x(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-3t}$, $y(t) = k_1 e^{-t} - k_2 e^{-3t}$
 Sol. particular: $x(t) = 1500 e^{-t} - 500 e^{-3t}$, $y(t) = 1500 e^{-t} + 500 e^{-3t}$
- 6.- Sol. general: $x(t) = k_1 e^t \cos(3t) + k_2 e^t \sin(3t)$, $y(t) = -3k_1 e^t \sin(3t) + 3k_2 e^t \cos(3t)$
 Sol. particular: $x(t) = 100e^t \cos(3t) + \frac{1000}{3} e^t \sin(3t)$, $y(t) = -300e^t \sin(3t) + 1000 e^t \cos(3t)$
- 7.- Sol. general: $x(t) = k_1 e^{(1+k)t} + k_2 e^{(1-k)t}$, $y(t) = -k_1 e^{(1+k)t} + k_2 e^{(1-k)t}$
 Sol. particular: $x(t) = 5 e^{(1+k)t} + 95 e^{(1-k)t}$, $y(t) = -5 e^{(1+k)t} + 95 e^{(1-k)t}$
- 8.- a) $y(t) = y(0) e^{ct}$, $x(t) = \frac{b y(0)}{c+a} e^{ct} + \left(x(0) - \frac{b y(0)}{c+a} \right) e^{-at}$
 b) $\underline{x(0)=0}$: $y(t) = y(0) e^{ct}$, $x(t) = \frac{by(0)}{c+a} (e^{ct} - e^{-at})$. Si $\underline{y(0)=0}$: $y(t) = 0$, $x(t) = x(0) e^{-at}$
- 9.- Sol. general: $Y(t) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 30 \end{pmatrix} e^{-4t}$
- 10.- Sol. general: $Y(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{4t}$

Práctica 6: Resolución de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneos

1.- $V_1(t) = 1000 e^{-at}$ y $V_2(t) = -1000 e^{-at} - b t + 1100$

2.- Solución general: $x(t) = c_1 e^{5t} + c_2 e^t + 4$ e $y(t) = -c_1 e^{5t} + c_2 e^t + 4$

Solución particular: $x(t) = -2 e^{5t} + 4 e^t + 4$ e $y(t) = 2 e^{5t} + 4 e^t + 4$

3.- Sol. general: $y(t) = -C_1 e^{3t} + \frac{e^t}{4} (\cos 2t + \sin 2t) + C_2 e^{-t}$,

$$x(t) = C_1 e^{3t} + \frac{e^t}{4} (\cos 2t + \sin 2t) + C_2 e^{-t}$$

Sol. particular: $C_1 = -45$, $C_2 = \frac{219}{4} = 54.75$.

4.- Sol. general: $x(t) = 2 + C_1 e^t + C_2 e^{-t}$, $y(t) = 10 - C_1 e^t + (C_2 - 13) e^{-t}$

(derive) $x(t) = 2 + C_1 e^t + (C_2 + \frac{13}{2}) e^{-t}$,

$$y(t) = 10 - C_1 e^t + (C_2 - \frac{13}{2}) e^{-t}$$

Sol. particular: $x(t) = 2 + 8 e^{-t}$, $y(t) = 10 - 5 e^{-t}$

5.- a) Sol. general: $Y(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} e^{4t} + c_3 \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-5t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} e^t$

Sol. particular: $Y(t) = -\frac{107}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2t} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} e^{4t} - \frac{13}{3} \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-5t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} e^t$

b) $Y(6 \text{ meses}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 28.1804 \end{pmatrix}$

Práctica 7: Ecuaciones y Sistemas de Ecuaciones en Diferencias.

1.- a) $x_n = x_0 + 2 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$, b) $x_n = 3^n x_0$, c) $x_n = \frac{(n+4)(n+3)}{12} x_0$, d) $x_n = n! x_0$

e) $x_n = (-1)^n x_0$, f) $x_n = (n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1 + (n-1)(n-2) \dots 2 + \dots + (n-1) + 1$

2.- $r_n = (0.99)^n r_0$, $r_4 = (0.99)^4 r_0$.

3.- $r_n = (0.8)^{n-1} \left(2.8 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$, máxima reacción: $r_2 = 1.84$

4.- a) $x_n = 2^n$, b) $x_n = (-3)^n + 5n(-3)^{n-1}$, c) $x_n = (2)^{n/2} \left[\cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right) + 3 \sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right) \right]$

d) $x_n = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}} \right) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}} \right) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$

5.- $x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

6.- a) $x_n = \frac{1}{4} 3^n - \frac{1}{8} (-3)^n - \frac{1}{8}$ b) $x_n = \frac{1}{4} 3^n + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} (n-1)$

c) $x_n = \frac{64}{51} \left(\frac{-1}{4}\right)^n + \frac{1}{85} 4^n - \frac{19}{15} (-1)^n$ d) $x_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} (-2)^n$

7.- $x_n = 349.75 (-1)^n - \frac{1}{4} \frac{1}{3^{n-1}} - 245 (-2)^n$

8.- $x_n = 25 \cdot 3^n + 75$

9.- $x_n = 200 - 100 \frac{1}{2^n}$ Población a largo plazo = 200

10.- $x_n = 2g + (8 - 2g) 6^n$. Si $g = 4$, $x_n = 8$. Si $g = 5$, $x_1 = 0$.

11.- Cuota anual 9958.68 Tm.

12.- $x_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n + 40 \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right)$. Se extingue en el año 24.

$$13.- \quad x_n = 3^{n+2} - \frac{n^2 - 5n - 242}{2}, \quad y_n = 3^{n+2} - n^2 + 6n + 241$$

$$14.- \quad \underline{n \text{ par}} \quad x_n = \frac{106}{5} 2^n - \frac{1}{5} 3^n, \quad y_n = \frac{749}{5} 2^n + \frac{1}{5} 3^n$$

$$\underline{n \text{ impar}} \quad x_n = \frac{2459}{5} 2^n - \frac{1}{5} 3^n, \quad y_n = -\frac{1604}{5} 2^n + \frac{1}{5} 3^n$$

$$15.- \quad x_n = (\sqrt{5})^n [10 \cos(\theta n) + 100 \sin(\theta n)] \quad \text{con } \theta = 63.435^\circ \approx 0.352 \pi \text{ radianes}$$

$$y_n = 5 (\sqrt{5})^n [\sqrt{5} \cos(\theta(n+1)) + 10\sqrt{5} \sin(\theta(n+1)) - \cos(\theta n) - 10\sin(\theta n)]$$

$$16.- \quad x_n = \left(k_0 + \frac{n}{4} - \frac{1}{8}\right) 2^n + \left(h_0 + \frac{1}{8}\right) (-2)^n, \quad y_n = -2^{n-3} (3(8h_0+1)(-1)^n - 8k_0 - 2n + 5)$$

$$17.- \quad \text{b) } x_n = -25 \cdot 3^n + 125, \quad y_n = 25 \cdot 3^n + 125$$

$$\text{d) } x_n = 100, \quad y_n = 100$$

$$18.- \quad x_n = 20 \quad y_n = 500 \cdot 1.5^n + 2000$$